الاشتقاق و تطبيقاته

القدرات المنتظرة	
ـ تقريب دالة بجوار نقطة بدالة تآلفية؛ ـ التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس منحناها في النقطة التي أفصولها x_0؛ ـ التعرف على المشتقة الأولى للدوال المرجعية ـ التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة ـ تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ ـ تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ ـ تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتا أو من تمثيلها المبياني؛ ـ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية ؛ ـ تطبيق الاشتقاق في حساب بعض النهايات	1 ع رياضيات الدرس 1 الدورة الثانية 12 ساعة 1 ع تجريبية الدرس 3 الدورة الثانية 10 ساعات

1- الاشتقاق في نقطة

أ/ نشاط

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدن سرعة بدئية أي $v_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$
تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية $d = f(t) = 5t^2$ حيث t هي المدة بالثانية و
$d = f(t)$ المسافة بالمتر

1- بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين t و $t+h$ حيث $h \neq 0$ و $t+h \succ 0$ هي $10t + 5h$

2- نضع $t = 0,5s$

أ/ أملئ الجدول التالي

h	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01
$t+h$						
السرعة المتوسطة بين t و $t+h$						

ب/ باستعمال الجدول تضنن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول h الى 0

ج/ أحسب $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$ ثم قارنها مع نتيجة ب

العدد $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$ يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة $t = 0,5s$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة f عي النقطة $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h} = f'(0,5)$

ب- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا وجد عدد حقيقي l حيث $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$

ونرمز لها.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0 ونرمز له ب $f'(x_0)$.

نكتب $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

ملاحظة: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مثال: نعتبر $f(x)=x^2+2x$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+3=4$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1)=4$

ج) الدالة التألفية المماسة لدالة

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

لدينا $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نضع $\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$ ، $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

$$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\Leftrightarrow f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)\quad / \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$$

أي أنه بجوار x_0 لدينا $f(x)\simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

الدالة $x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فان الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة x_0

هي الدالة $g:x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تمرين نعتبر $f(x)=\sqrt{x}$

1) حدد الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1

2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

الجواب

1/ لدينا $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

ومنه الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1 هي الدالة $g:x\to\frac{1}{2}(x-1)+1$

أي $g:x\to\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

2/لدينا $099\approx 1$ ومنه $\sqrt{0,99}=f(0,99)\simeq g(0,99)=0,5\times 099+0,5=....$

لدينا $1,001\approx 1$ ومنه $\sqrt{1,001}=f(1,001)\simeq g(1,001)=0,5\times 1,001+0,5=....$

2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرمز لها ب $f_g'(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ملاحظة

$$f'_g(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{و} \quad f'_d(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ب – خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

تمرين نعتبر $f(x)=x^2+|x|$ أدرس قابلية اشتقاق f في0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}x+1=1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}x-1=-1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f_g'(0)=-1$

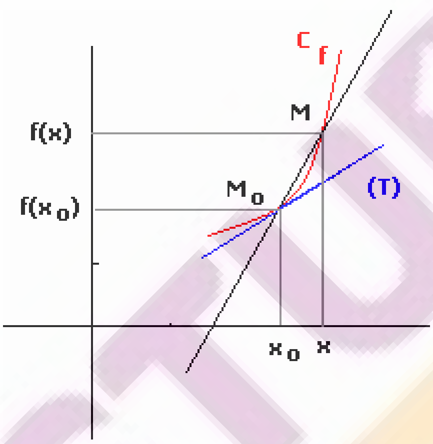
لدينا $f_d'(0)\neq f_g'(0)$ ومنه f قابلة للاشتقاق في0

4- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0 و C_f منحناها

نعتبر $M_0(x_0;f(x_0))$ و $M(x;f(x))$ نقطتين من C_f



المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب M من M_0 (أي x تؤول إلى x_0) فان $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تؤول إلى $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم (MM_0) يدور حول M_0 إلى أن ينطبق مع المستقيم (T) ذا المعامل الموجه $f'(x_0)$.

المستقيم (T) مماس للمنحنى C_f

معادلة (T) هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها

قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول x_0

معادلته $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تمرين: نعتبر $f(x)=x^3$

أدرس قابلية اشتقاق f في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول2

الجواب

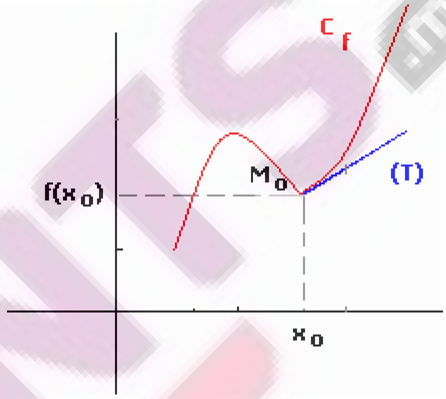
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+2x+4=12$$

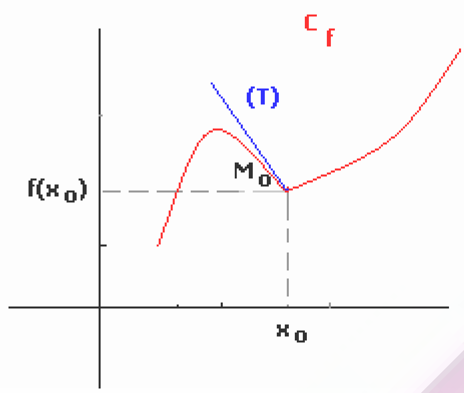
اذن f قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2)=12$

ومنه معادلة المماس هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=12(x-2)+8$

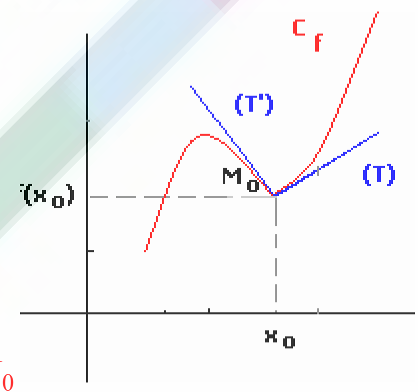
$y=12x-16$

ب- نصف المماس





$$\begin{cases}(T): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\geq x_0\end{cases}\qquad \begin{cases}(T): y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\leq x_0\end{cases}$$



نقطة مزواة M_0

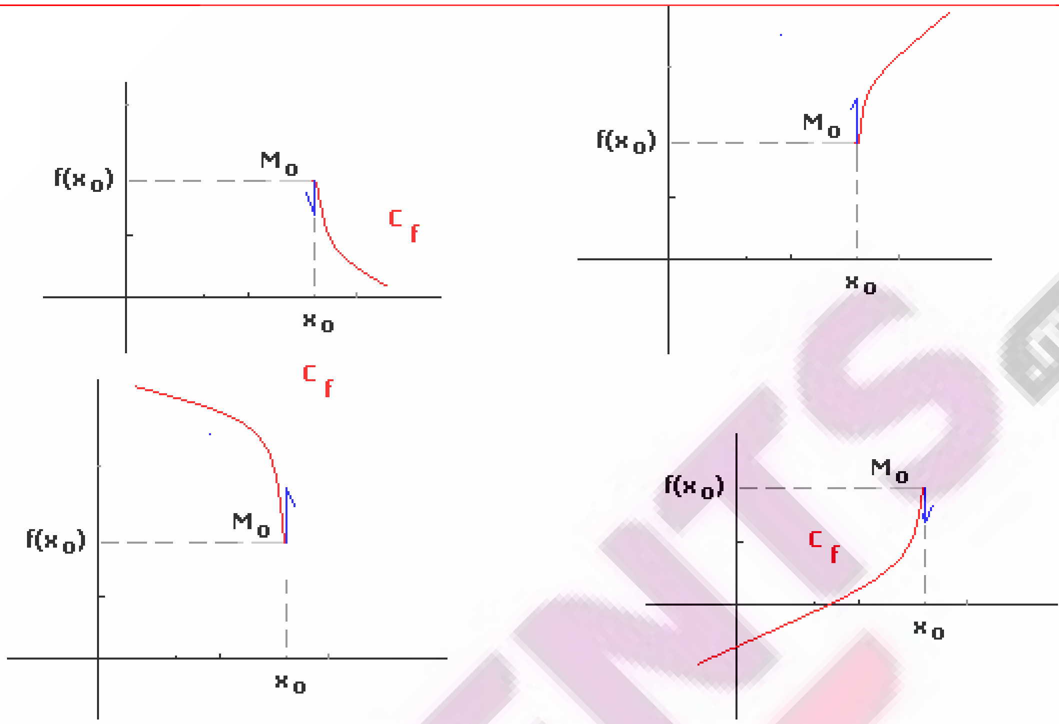
$$\begin{cases}(T): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x\geq x_0\\ (T'): y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) & x\leq x_0\end{cases}$$

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f_d'(x_0)$ (أو $f_g'(x_0)$)

خاصية

إذا كانت نهاية $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ هي $\pm\infty$ f في x_0 (على اليمين في x_0 أو على اليسار في x_0)فان C_f يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0 (نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الافصول x_0)



تمرين نعتبر $f(x)=\left|x^2-1\right|$ و $g(x)=\sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا

أدرس قابلية اشتقاق g على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

الجواب

$$* \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|x^2-1\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يمين1 و $f_d'(1)=2$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left|x^2-1\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-x-1=-2$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يسار1 و $f_g'(1)=-2$

نلاحظ $f_d'(1)\neq f_g'(1)$ اذن f غير قابلة للاشتقاق في 1

(C_f) يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته $y=2(x-1)$.

(C_f) يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته $y=-2(x-1)$

$$* \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يمين0 و (C_g) يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

5- الدالـــة المشتقة
أ- تعاريف

تعريف1
نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

تعريف2
نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ و على يمين a و على يسار b .

ملاحظة : بالمثل نعرف الاشتقاق على $]a;b]$ و على $[a;b[$

تعريف3
لتكن قابلة للاشتقاق على المجال I
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

مثال : نعتبر $f(x)=x^2$
ندرس قابلية اشتقاق f و نحدد الدالة المشتقة
ليكن $x_0\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$ ومنه قابلة لاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)=2x_0$

اذن f قابلة للاشقاق في $\mathbb{R}$ و $f'(x)=2x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ملاحظة:
يكون للمنحنى الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

لتكن f قابلة للاشتقاق مجال I
إذا الدالة f' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرمز لها بالرمز f''

إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة أو المشتقة من الرتبة 3 و نرمز لها بالرمز f''' أو $f^{(3)}$
و هكذا ....
نرمز للدالة المشتقة من الرتبة n حيث $n\in\mathbb{N}^*$ بالرمز $f^{(n)}$

مثال : نعتبر $f(x)=x^2$

رأينا أن $f'(x)=2x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ وحيث $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=2$ فان $f''(x)=2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

6- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
$f+g$ و $f\times g$ و λf و f^n دوال قابلة للاشتقاق على المجال I
و اذا كانت g لا تنعدم على I فان $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلتان للاشتقاق على المجال I

$$\forall x\in I\quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$
$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$(\lambda f)'=\lambda f'(x)$$

$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $\forall x\in I$ بحيث g لا تنعدم على I

*- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$\left(f^n\right)'(x)=n\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$ $\forall x\in I$ (نبين ذلك بالترجع)

نبرهن $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$(f\times g)'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)$$

و حيث $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ و $\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$ و $\lim_{h\to0}f(x+h)=f(x)$

فان $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

* الدالة الثابتة: $f(x)=k$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to x$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to ax+b$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=a$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to x^n$ $n\in\mathbb{N}^*$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=nx^{n-1}(x)'=nx^{n-1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f:x\to\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{x\times x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

و $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

* الدالة $f:x\to\sqrt{x}$ لتكن $x_0\in\mathbb{R}_+^*$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

f غير قابلة للاشتقاق في 0

* الدالة $f : x \to \sin x$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(2\cos(x_0+h)\right)\times 2\times\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x_0$$

إذن

$x \to \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\sin'(x)=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \cos x$

$x \to \cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\cos'(x)=-\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

* الدالة $f : x \to \tan x$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\tan' x=\frac{(\sin x)'(\cos x)-(\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$

إذن $\tan' x=1+\tan^2 x \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

$x\to\tan x$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

و $\tan' x=1+\tan^2 x \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نتائج

* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$
* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

أمثلة

نعتبر $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2+x-2}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1;-2\}$

f الدالة الجدرية ومنه f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{1;-2\}$

و $....=\quad f'(x)=\dfrac{(3x^2-3)(x^2+x-2)-(2x+1)(2x^3-3x)}{(x^2+x-2)^2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{1;-2\}$

8- مشتقة $f(ax+b)$ - مشتقة $\sqrt{f}$

مبرهنة

ليكن المجال J صورة المجال I بالدالة التألفية $x\to ax+b$
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على J فان $g : x\to f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و
$g'(x)=af'(ax+b) \quad \forall x\in I$

مثال: نعتبر $f(x)=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=5\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

خاصية

لتكن f دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

الدالة $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I \quad \left(\sqrt{f}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

مثال: نعتبر $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

$D_f = [0;1]$

$x \to -x^2 + x$ دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال $]0;1[$

إذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $\forall x \in]0;1[\qquad f'(x) = \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^n \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n \quad n \in \mathbb{Z}^{*-}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

تمارين

1- أدرس اشتقاق f و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

* $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4$ * $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$ * $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-2}$ * $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-x}$

* $f(x) = \left(x^2 + x\right)^5$ * $f(x) = (\cos x)^5$ * $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x - \sin x}$

* $\begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \le 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x \succ 0 \end{cases}$ * $f(x) = x^2 + x|x|$

2- نعتبر $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$

أ- بين أن منحنى f يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$

ب- أكتب معادلتي هذين المماسين.

9- تطبيقات الدالة المشتقة

a- قابلية الاشتقاق و المطراف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$

نعتبر f قابلة للاشتقاق في x_0 و تقبل مطرافا في x_0

لنفترض أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند x_0

ومنه يوجد مجال مفتوح J مركزه x_0 ضمن I حيث $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in J$

f قابلة للاشتقاق في x_0 ومنه $f'(x_0) = f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

أي $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

و حيث $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in J$ فان $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \geq x_0$ و $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \leq x_0$

ومنه $f_g'(x_0) \geq 0 \quad ; \quad f_d'(x_0) \leq 0$ أي أن $f'(x_0) \geq 0 \quad ; \quad f'(x_0) \leq 0$ اذن $f'(x_0) = 0$

(إذا كانت f تقبل قيمة دنيا نسبية عند x_0 نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج)

مبرهنة

لتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$

اذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطرافا في النقطة x_0 فان $f'(x_0) = 0$

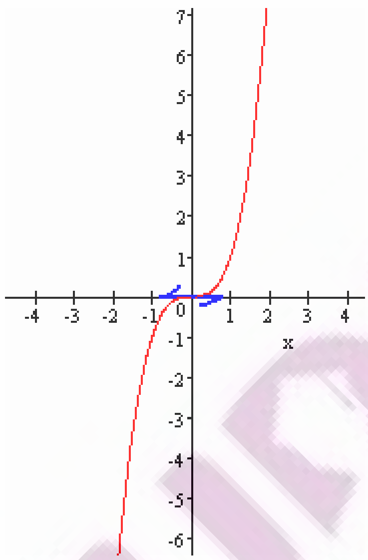
ملاحظة:

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية

مثال $f(x) = x^3 \quad ; \quad x_0 = 0$

f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و $f'(0) = 0$

و مع ذلك f لا تقبل مطرافا عند 0



b- الاشتقاق ورتابة دالة

مبرهنة

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I

تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا وفقط اذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة على I

أي $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ (f' موجبة قطعا على I أي $f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in I$)

تكون f تناقصية (قطعا) على I اذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة على I

أي $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ (f' سالبة قطعا على I أي $f'(x) \prec 0 \quad \forall x \in I$)

تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة على I أي $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 6x + 1$

أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرا ت f (في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات)

حدد مطاريف f ان وجدت

الجواب

* مجموعة تعريف $D_f = \mathbb{R}$

* $f(x) = x^3 - 6x + 1$ ومنه $f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

اشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - 2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		+	0	-	0	+	

ومنه f' موجبة على كل $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و سالبة على $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

ومنه f تزايدية على كل $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;-\sqrt{2}\right]$ و تناقصية على $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$10\sqrt{2}+1$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن f تقبل قيمة قصوى عند $-\sqrt{2}$ و دنيا عند $\sqrt{2}$

ملاحظة لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

f تقبل مطرافا في x_0 إذا و فقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 و تتغير إشارتها في مجال مفتوح يحتوي على x_0

10- المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2 y=0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية

تعريف

ليكن ω عدد ا حقيقيا غير منعدم

المعادلة $y''+\omega^2 y=0$ تسمى معادلة تفاضلية.

كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة $y''+\omega^2 y=0$

أمثلة $y''+4y=0$ و $y''+\sqrt{2}y=0$ و $y''+\dfrac{3}{2}y=0$ معادلات تفاضلية

خاصية

ليكن ω عدد ا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y''+\omega^2 y=0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي $x\to\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$

حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

ملاحظة

حل المعادلة $y''+\omega^2 y=0$ يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

مثال

حل المعادلة $y''+4y=0$

لدينا $\omega^2=4$ ومنه $\omega=2$ يمكن أخذ $\omega=-2$ هذا لن يغير مجموعة الحلول

الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y:x\to\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

معادلة تفاضلية خاصة

حل المعادلة $y''=0$

إذا كان $y''=0$ فان y' دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y:x\to ax+b$

حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$