

النهايات

الدورة الثانية 10 ساعة	الدرس الأول
---------------------------	-------------

1- النهاية لا منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = x^3$

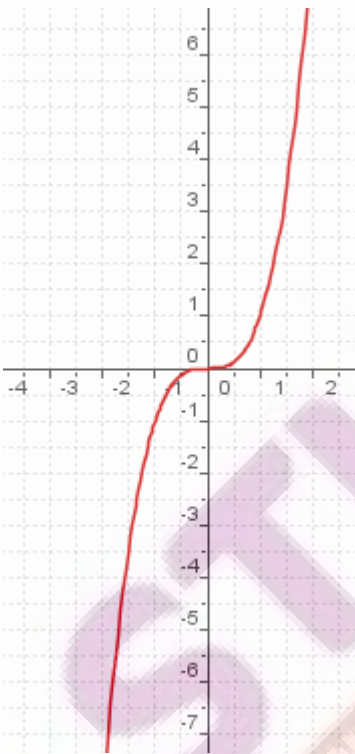
1- أرسم C_f

2- أتمم الجدول التالي

x	-10^{100}	$-10^{10^{12}}$	-10^{10^9}	-10^{100}	-10	10	10^{100}	10^{10^9}	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكثر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$
ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$



نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ x قيما أكبر فأكثر
و موجبة فإن $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكثر و موجبة وتؤول الى $+\infty$ عندما يؤول
 x إلى $+\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ نكتب}$$

نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و
سالبة فإن $f(x)$ تأخذ قيما أصغر فأصغر و سالبة وتؤول الى $-\infty$ عندما يؤول
 x إلى $-\infty$

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ نكتب}$$

كتابات و نهايات اعتيادية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a; +\infty[$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty; a]$

إذا كان $f(x)$ يؤوّل إلى $+\infty$ عندما يؤوّل x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عندما يؤوّل x إلى $-\infty$

إذا كان $f(x)$ يؤوّل إلى $-\infty$ عندما يؤوّل x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$

و تقرأ نهاية $f(x)$ هي $-\infty$ عندما يؤوّل x إلى $-\infty$

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ إذا كان } n \text{ زوجي}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ إذا كان } n \text{ فردي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

2- النهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x^2}$

1- باستعمال احد البرامج المعلوماتية أرسم C_f

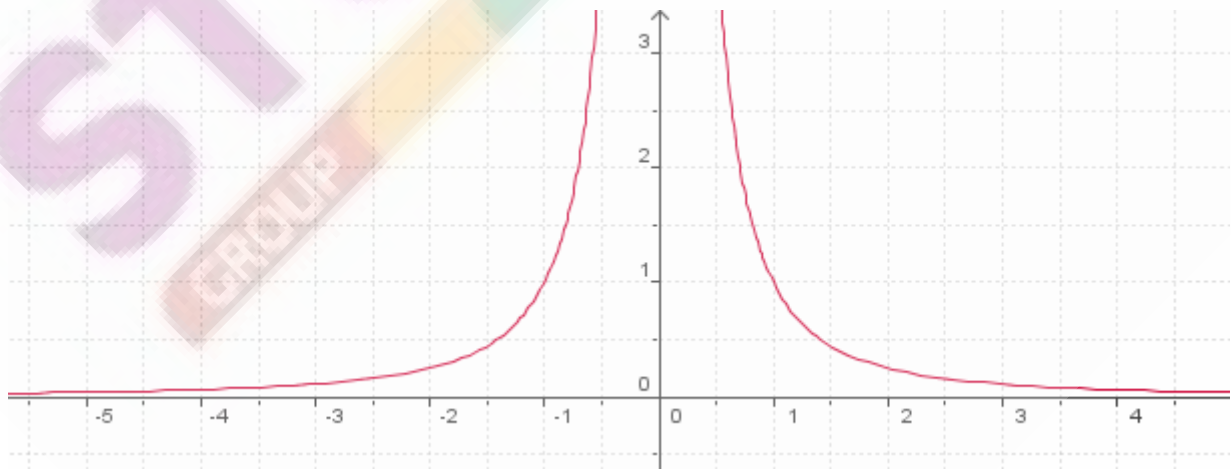
2- أتمم الجدول التالي

x	-10^{100}	-10^{102}	-10^{109}	-10^{100}	-10	10	10^{100}	10^{109}	10^{102}	10^{100}
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤوّل x إلى $+\infty$

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤوّل x إلى $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤوّل إلى 0 نكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

نشاط

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} \text{ حيث } f \text{ نعتبر الدالة}$$

1- أرسم C_f

2- خذ قيما أكبر فأكبر وموجبة و أملئ بها الجدول

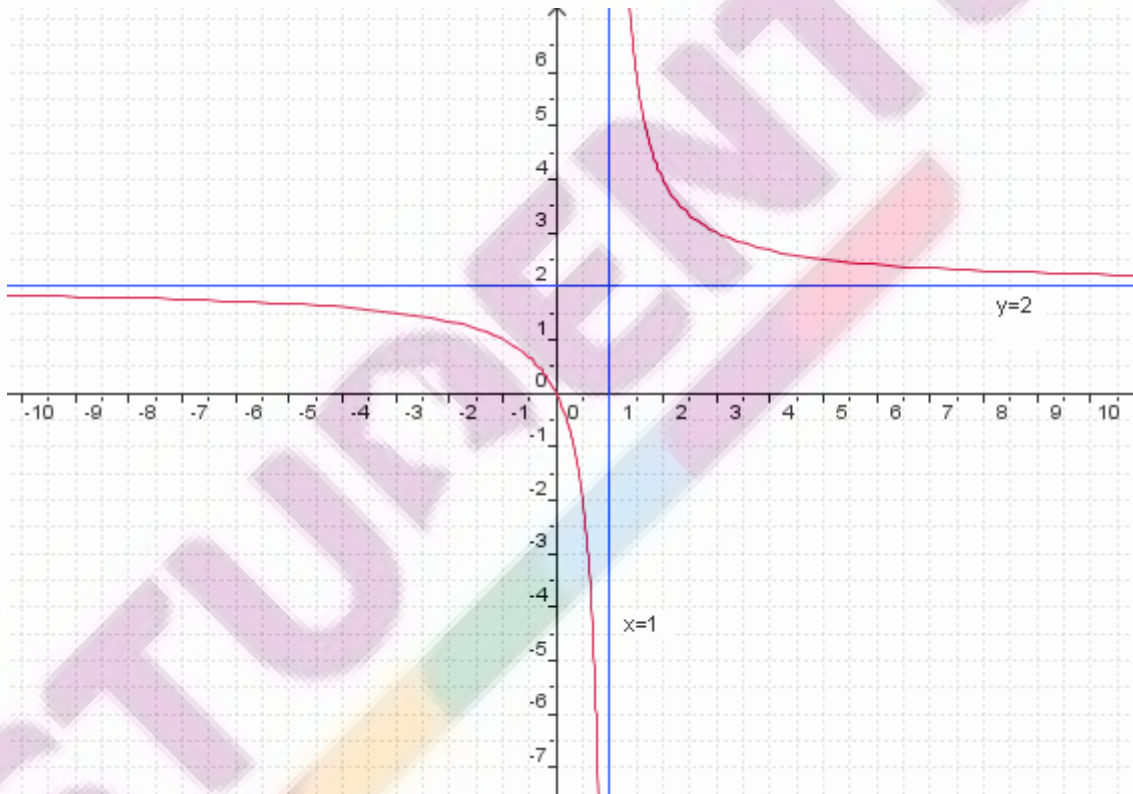
x										
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول x إلى $+\infty$

خذ قيما أصغر فأصغر وسالبة و أملئ بها الجدول

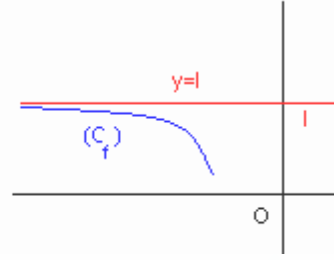
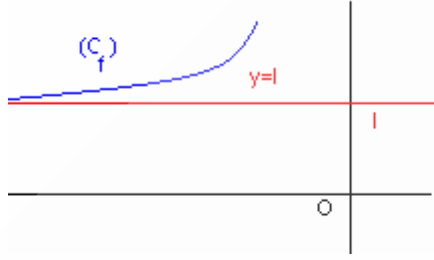
x										
$f(x)$										

ماذا تستنتج لـ $f(x)$ عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول x إلى $-\infty$ نلاحظ في كلتا الحالتين $f(x)$ يؤول إلى 2 نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ النهاية منتهية عند $+\infty$ لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a; +\infty[$ إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ أو $\lim_{+\infty} f(x) = l$ النهاية منتهية عند $-\infty$ لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty; a[$ إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ أو $\lim_{-\infty} f(x) = l$

ملاحظات

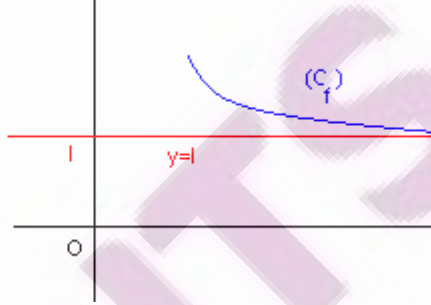
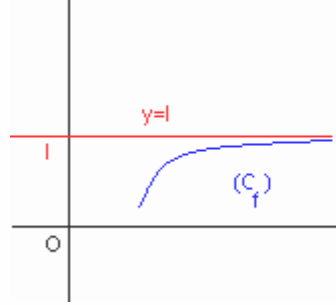
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^*$$

منحنى الدالة يقترب أكثر وأكثر من المستقيم ذا المعادلة $y = l$ عندما يؤول x إلى $-\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^*$$

منحنى الدالة يقترب أكثر وأكثر من المستقيم ذا المعادلة $y = l$ عندما يؤول x إلى $+\infty$



-* إذا كانت f زوجية فان $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

-* إذا كانت f فردية فان $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

نهايات اعتيادية

$$\forall (k; n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

خاصية

لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا
• إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ أو $-\infty$ فان هذه النهاية وحيدة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$$

تمرين

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 1}{x^2} \quad \text{نعتبر}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 \quad \text{بين أن}$$

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 1}{x^2} + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

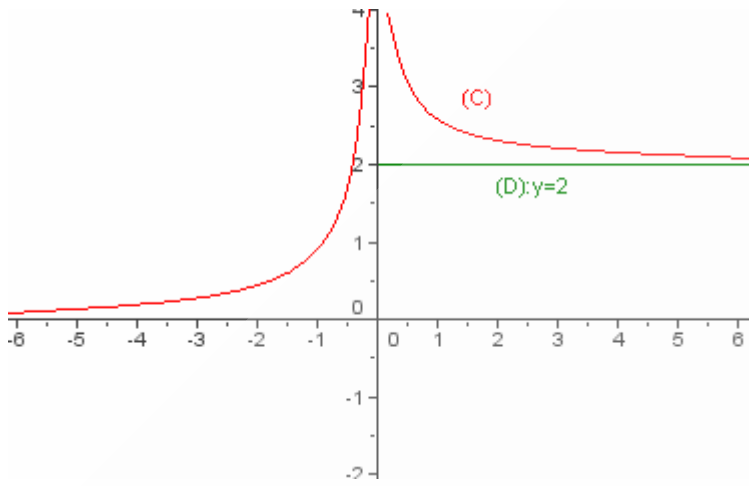
$$\text{اذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

تمرين : قراءة نهايات مبيانيا

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$

من خلال الشكل

حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



من خلال الشكل

المنحنى يقترب من المستقيم $(D): y=2$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

المنحنى يقترب من محور الأفاصيل عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

3- نهاية منتهية و لا منتهية لدالة في نقطة نشاط

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$

1- أرسم C_f

ب/ أتمم الجدول التالي

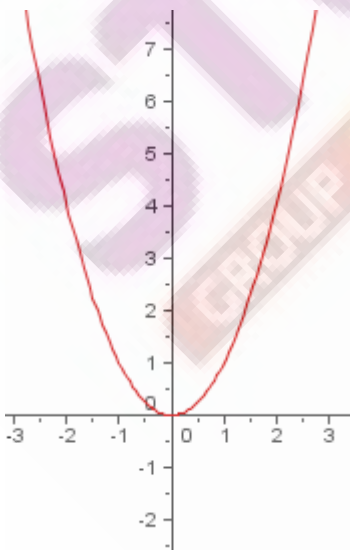
x	-0,2	-0,1	-0,001	-10^{-30}	10^{-30}	0,001	0,1	0,2
$f(x)$								

من خلال الشكل و الجدول ماذا تلاحظ استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2- أتمم الجدول التالي

x	-0,2	-0,1	-0,001	-10^{-30}	10^{-30}	0,001	0,1	0,2
$g(x)$								

من خلال الجدول ماذا تلاحظ تضن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$



1/ من خلال الشكل و الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي 0 عند 0

نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2/ من خلال الجدول

نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيما أكبر فأكبر وموجبة أي تؤول إلى $+\infty$ عندما

يؤول x إلى 0

نقول إن نهاية $f(x)$ هي $+\infty$ عند 0

نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

نهاية منتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقيين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a - \alpha; a + \alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a - \alpha; a + \alpha[- \{a\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$
إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f = l$

خاصية

ليكن a و l عددين حقيقيين $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
إذا كان $f(x)$ تغبل l في a عان النهاية وحيدة

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$

أمثلة $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

نهاية لامنتهية لدالة في نقطة

ليكن a و l عددين حقيقيين و f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a - \alpha; a + \alpha[$ أو مجموعة من نوع $]a - \alpha; a + \alpha[- \{a\}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$
إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$
إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$

3-النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

حدد D_f

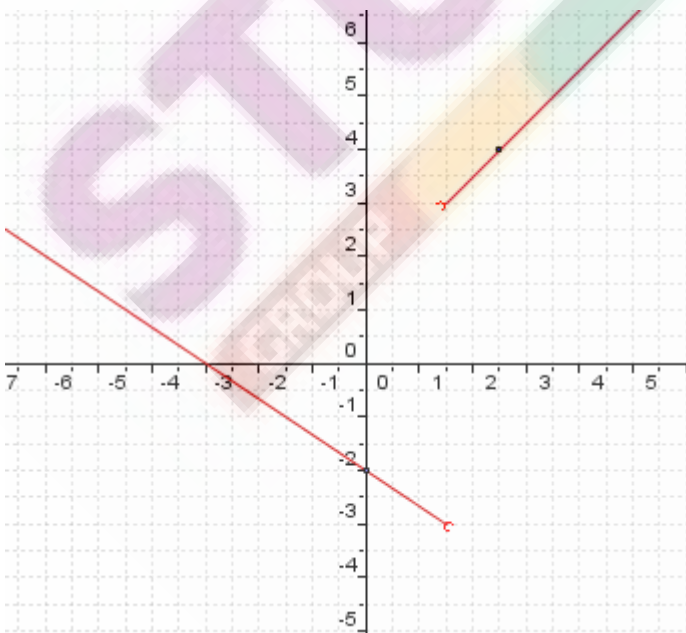
أنشئ C_f

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 1 على اليمين
من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 1 على اليسار

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليمين إلا و $f(x)$ تقترب من 3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 1 على اليمين هي 3 نكتب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ أو $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليسار إلا و $f(x)$ تقترب من -3 نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 1 على اليسار هي -3 نكتب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$ أو $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$



نشاط

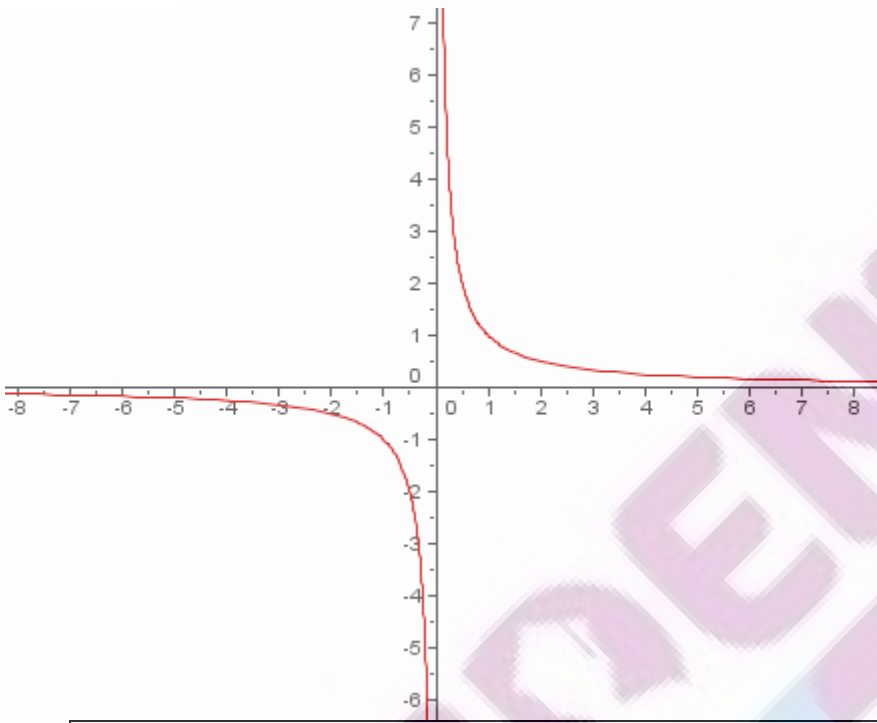
نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{1}{x}$

حدد D_f

أنشئ C_f

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 0 على اليمين
من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول $f(x)$ عندما يقترب x من 0 على اليسار

$$D_f = \mathbb{R}^*$$



نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على

اليمين فإن $f(x)$ تؤول $+\infty$ نقول إن

نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 على

اليمين هي $+\infty$ نكتب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$\text{أو } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على

اليسار فإن $f(x)$ تؤول $-\infty$ نقول إن

نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 0 على

اليسار هي $-\infty$ نكتب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$$\text{أو } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

ليكن a و l عددين حقيقيين

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a على اليسار فإننا نكتب $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$

نهايات اعتيادية

ليكن n عددا صحيحا طبعيا غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجيا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ فرديا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

مبرهنة

لتكن f دالة عددية

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

تمرين

لتكن f دالة عددية حيث

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x > 0 \\ f(x) = x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{استنتج} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

تمرين

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} \quad \text{لتكن } f \text{ دالة عددية حيث}$$

$$1- \text{بين أن } \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -2} -x + 2 = 4$$

$$2- \text{استنتج} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$3- \text{هل الدالة } f \text{ تقبل نهاية في } -2$$

الجواب

$$1- \text{نبين أن } \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$$

$$\text{نضع} \quad X = x + 2 \quad \text{أي} \quad X - 2 = x$$

$$\text{عندما يؤول } x \text{ أي } -2 \text{ فإن } X \text{ تؤول إلى } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = \lim_{X \rightarrow 0} X - 4$$

$$\text{و حيث أن } 0 = \lim_{X \rightarrow 0} [(X - 4) - (-4)] = \lim_{X \rightarrow 0} X - 4 \quad \text{فان} \quad \lim_{X \rightarrow 0} X - 4 = -4 \quad \text{اذن} \quad \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$$

$$\text{نبين أن } \lim_{x \rightarrow -2} -x + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} -x + 2 = \lim_{X \rightarrow 0} -X + 4$$

وحيث أن $\lim_{x \rightarrow -2} -x - 2 = 4$ إذن $\lim_{X \rightarrow 0} -X + 4 = 44$ $\lim_{X \rightarrow 0} [(-X + 4) - 4] = \lim_{X \rightarrow 0} -X = 0$

2/ نستنتج $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

لدينا $\forall x > -2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x - 2 = -4$

لدينا $\forall x < -2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)} = -x + 2$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -x + 2 = 4$

3/ لدينا $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ إذن الدالة f لا تقبل نهاية في -2

4- العمليات على النهايات

نقبل جميع العمليات الآتية

نعتبر دالتين f و g .

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

نهاية $f + g$	نهاية g	نهاية f
$l + l'$	l'	l
$+\infty$	$+\infty$	l
$-\infty$	$-\infty$	l
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$

ب- نهاية جداء

نهاية $f \times g$	نهاية g	نهاية f
$l \times l'$	l'	l
∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	$l \neq 0 \quad l$
∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	$l \neq 0 \quad l$
شكل غير محدد	$+\infty$	0
شكل غير محدد	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ملاحظة:

لحساب نهاية $f \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ يمكن اعتبار $f \lambda$ كجداء الدالة

الثابتة $\lambda \rightarrow x$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

ج- نهاية خارج

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية g	نهاية f
$\frac{l}{l'}$	$l' \neq 0$ و l'	l
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
$+\infty$	0^+	$+\infty$ أو $l > 0$
$-\infty$	0^+	$-\infty$ أو $l < 0$
$-\infty$	0^-	$+\infty$ أو $l > 0$
$+\infty$	0^-	$-\infty$ أو $l < 0$
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$

د- نهاية دالة حدودية - دالة جذرية

لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \text{في حالة } Q(a) \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي $P(x)$ و $Q(x)$ الأكبر درجة فان

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n & \text{و} & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{bx^m} & \text{و} & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \end{aligned}$$

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2^3 - 2^2 + 6 - 1 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3} = \frac{-3(-1)^2 - (-1) + 1}{3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + 7x^3 - x + 31}{x^9 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7}{x^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^5 - x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{3x^5} = \frac{7}{3}$$

تمرين

حدد النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 (-2x^2 + 5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{-x^2 + x} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2 - 3x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

الجواب

نحدد النهايات

* لدينا $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - x = 9 - 3 = 6$ و $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + x - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6} = \frac{6}{6} = 1$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 (-2x^2 + 5) = -\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$

* إذا كان $x < 2$ فإن $x - 2 < 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$ إذن $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

* نحدد $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$		$-$	$+$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$ و لدينا $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 5 = -3$ إذن $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{x-1} = -\infty$

* نحدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$

نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty - \infty)$

حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 1 = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)$

* نحدد $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$ بتعويض x نحصل على الشكل الغير المحدد $\frac{0}{0}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\} \quad \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{4} \text{ ومنه}$$

$$\frac{0}{0} \text{ نحدد } * \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} \text{ بتعويض } x \text{ نحصل على الشكل الغير المحدد}$$

ومنه الحدوديتان x^2+x-2 و $2x^2+x-3$ تقبلان القسمة على $x-1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \text{ نحدد } *$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ و منه نحصل على الشكل الغير المحدد $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ ; } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = -\infty \text{ وحيث } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty \text{ فان}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2-3x+2} \text{ نحدد } *$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x-2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2-3x+2 = 0 \text{ لدينا}$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	- 0	+

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2-3x+2} = -\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2-3x+2 = 0^- \text{ ومنه}$$

6 - نهايات الدوال اللاحدية خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من شكل $[a; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l} \text{ فان } l \geq 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ إذا كانت}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty \text{ فان } l \geq 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ إذا كانت}$$

ملحوظة:

الخاصية تبقى صحيحة إذا كان x يؤول الى $+\infty$ أو الى $-\infty$ أو الى a على اليمين أو a على اليسار
أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{1-4x} \text{ لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{1-4x} = \sqrt{9} = 3 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -2} 1-4x = 9 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2-5x+4} \text{ لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2-5x+4} = \infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2-5x+4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-\frac{1}{x}} \text{ لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^-} 1-\frac{1}{x} = +\infty \text{ لدينا}$$

7- النهايات والترتيب

f و g و h دوال عددية و $I =]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[- \{x_0\}$ ضمن حيز تعريف هذه الدوال

* إذا كان لكل x من I ، $|f(x) - l| \leq u(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

* إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ وكان $f \geq h \geq g$ على I فان $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

* إذا كان لكل x من I ، $f(x) \geq u(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

* إذا كان لكل x من I ، $f(x) \leq u(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

ملاحظة

الخصائص السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I بالمجموعة المناسبة

أمثلة

* نحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$

لدينا الدالة $x \rightarrow \sin^2 x$ لا تقبل نهاية

ونعلم أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$

و حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$

* نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2$

لدينا $\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| = \left| \frac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right|$

وحيث أن $|\sin x| \leq 1$ فان $|\sin - 2| \leq 3$

ومنه $\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1}$ أي $\left| \frac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1}$

و حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 1} = 0$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2$

8- نهايات مثلثية**أ/ خاصة**

لكل عدد حقيقي a

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

لكل عدد حقيقي a حيث $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = \tan \pi = 0$$

ب/ نقبل $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

لنحدد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

لدينا $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ومنه $\frac{1}{|\tan x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\sin x|}$ حيث $x \neq 0$

وبالتالي $\frac{|\sin x|}{|\tan x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|\sin x|}$ أي أن $|\cos x| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$

و حيث أن $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ و x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* لنحدد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

نضع $X = \frac{x}{2}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 = \frac{1}{2}$

* لنحدد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

خاصة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

تمارين

حدد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$