الحساب المثلثي

القدرات المنتظرة:

- التمكن من مختلف صيغ التحويل؛
- التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات والمتراجحات الأساسية؛
- التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية.

1- أنشطة

a/ أنشطة تذكيرية

نشاط1

بسط التعابير التالية

$$A=\sin(11\pi-x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)\cdot\cos(5\pi-x)$$

$$B=\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4\pi}{5}$$

نشاط2

1/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

أ- $\sin x=\frac{1}{2}$ ب- $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج- $\tan x=-1$

2/ حل المتراجحات

أ- $\cos x\geq\frac{1}{2}$ $x\in]-\pi;\pi]$ ب - $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{2}$ $x\in[-\pi;\pi]$

ج- $\tan x\prec 1$ $x\in[0;2\pi]$

b/ أنشطة التقديم

أنشطة

نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم مباشر مرتبط بالدائرة المثلثية (C). ليكن x و y عددين حقيقيين. و M و M' نقطتين من (C) أفصوليهما المنحنيين x و y على التوالي

1- بين أن $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

2- أ/ بين أن $[2\pi]$ $(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM})\equiv x-y$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos(x-y)$

ب/ استنتج أن $\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$

3/ استنتج أن $\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$

$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$

4/ بين أن $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq 1$.

استنتج أن $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x-y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq -1$.

5/ استنتج أن $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ و $k\in\mathbb{Z}$

2/ صيغ التحويل

a/ خاصيات

$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$$
$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq 1$

$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$ حيث $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $x-y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
و $k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x.\tan y\neq -1$

b/ نتائج

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ حيث $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$ و $k\in\mathbb{Z}$

تمرين

أحسب النسب المثلثية للعدد $\dfrac{\pi}{8}$

تمرين

بين أن $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ و $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

c/ تحويل مجموع إلى جداء – تحويل جاء إلى مجموع

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$$
$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y$$

بوضع $x+y=p$ و $x-y=q$ أي أن $x=\dfrac{p+q}{2}$ و $y=\dfrac{x-y}{q}$

نحصل على النتائج

تحويل مجموع إلى جداء

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

تحويل جداء الى مجموع

مما سبق نستنتج أن

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$
$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

تمرين

أكتب $\cos 3x + \cos 7x$ على شكل جداء

تمرين

في مثلث مثلث ABC

بين أن $\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\times\cos\frac{\widehat{B}}{2}\times\cos\frac{\widehat{C}}{2}$

تمرين

بين أن $\sin^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x.\sin x$

تمرين

أكتب على شكل مجموع الجداء: $\sin 2x.\sin 3x.\sin 5x$

3- تحويل $a\cos x+b\sin x$

ليكن التعبير $a\cos x+b\sin x$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

نلاحظ أن $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

ومنه يوجد α من $]-\pi;\pi]$

حيث $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)$$
$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha)$$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ أو $b\neq 0$

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha)$$

حيث $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ملاحظة:

يمكننا تحويل $a\cos x+b\sin x$ لحل المعادلات من شكل $a\cos x+b\sin x=c$

أو المتراجحات $a\cos x+b\sin x\leq c$ أو $a\cos x+b\sin x\geq c$

تمرين

1/ حل المعادلة $\quad \cos x+\sqrt{3}\sin x=-1 \quad x\in\mathbb{R}$

2/ حل المتراجحة التالية

$\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x \succ -\sqrt{2} \quad x\in[-\pi;2\pi]$

إضافة

تحديد النسب المثلثية للعدد x بدلالة $t=\tan\frac{x}{2}$

لدينا $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

نقسم البسط و المقام بالعدد $\cos^2\frac{x}{2}$ مع اعتبار شروط الوجود

ومنه $\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ أي $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

باستعمال العلاقات $\sin x=2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$ و نفس الطريقة نحصل على $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

بوضع $\tan\frac{x}{2}=t$

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$