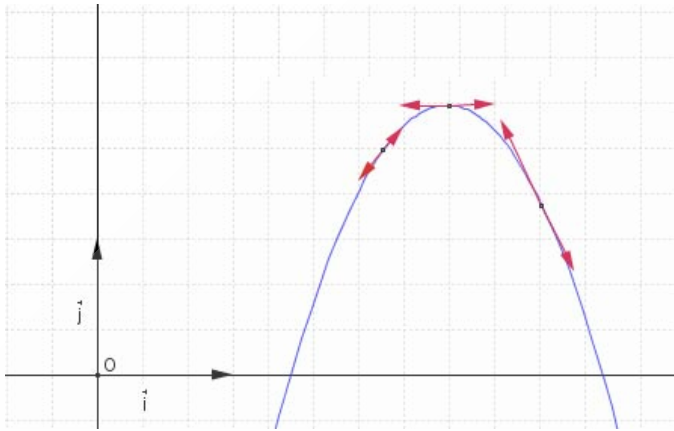


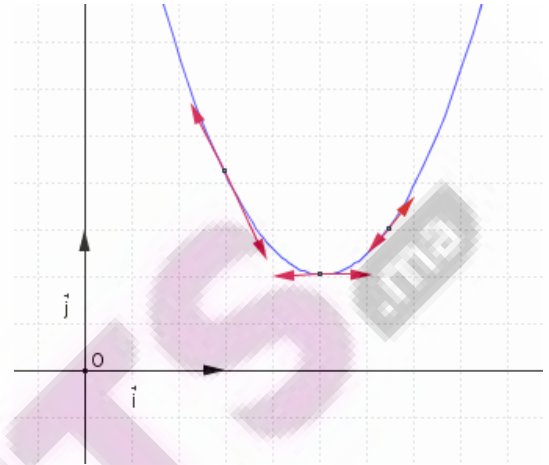
1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1 تعريف

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
 نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
 نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته



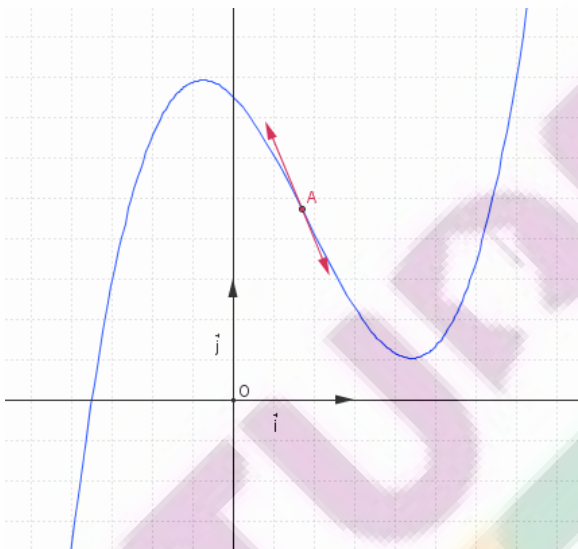
مقعر



محدب

2-1 تعريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على
 مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
 نقول إن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف
 للمنحنى (C_f) إذا تغير تقعر المنحنى (C_f)
 عند A



3-1 خصائص

- * f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I
- * إذا كانت f موجبة على I فإن (C_f) يكون محدبا على I
- * إذا كانت f سالبة على I فإن (C_f) يكون مقعرا على I
- * إذا كانت f تنعدم في x_0 من المجال I وكان يوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة f على $[x_0, x_0 + \alpha[$ مخالفة لإشارة f على $]x_0 - \alpha, x_0]$ فإن $M_0(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

تمارين $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$

1- أدرس تقعر C_f واستنتج أن النقطة A ذات الأفصول 1 نقطة انعطاف للمنحنى C_f

2 - أدرس تقعر C_g و حدد نقط انعطاف المنحنى C_g

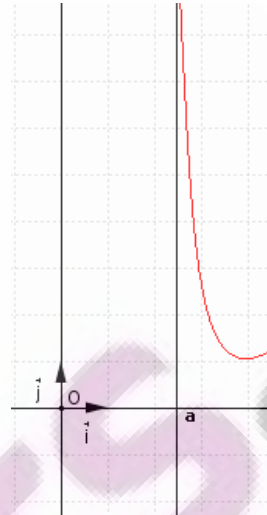
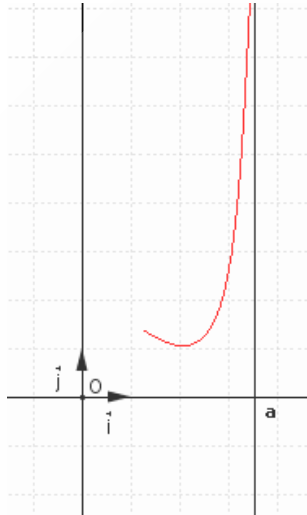
2- الفروع اللانهائية

1-2 تعريف

إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعاً لانهاية.

2-2 مستقيم مقارب لمنحنى
أ- المقارب الموازي لمحور الأرتاب
تعريف

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب لـ C_f

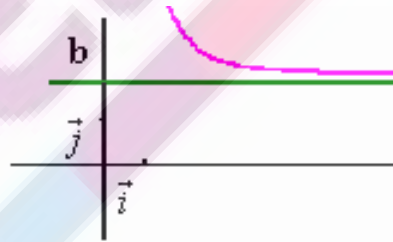
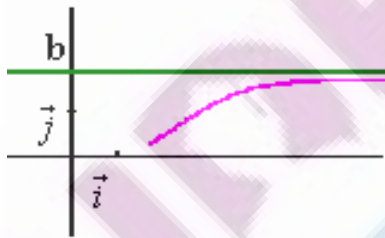


مثال $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى

ب- المقارب الموازي لمحور الأفاسيل
تعريف

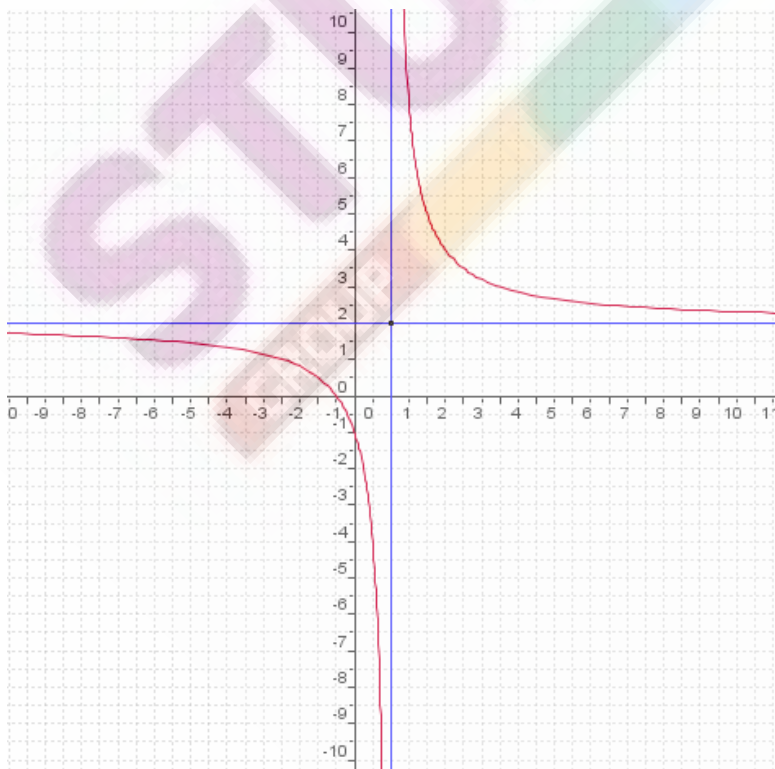
إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y = b$ مقارب لـ C_f .



مثال $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى



ج- المقارب المائل

تعريف

يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

خاصية

يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كانت توجد دالة h حيث يكون $f(x) = ax + b + h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

مثال

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f(x) = x - 2 - \frac{1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x - 1} = 0 \quad \text{ومن هنا المستقيم ذا المعادلة } y = x - 2 \text{ مقارب مائل للمنحنى (بجوار } +\infty \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - 1} = 0 \quad \text{ومن هنا المستقيم ذا المعادلة } y = x - 2 \text{ مقارب مائل للمنحنى (بجوار } -\infty \text{)}$$

في كثير من الأحيان يصعب كتابة على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$ حيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$

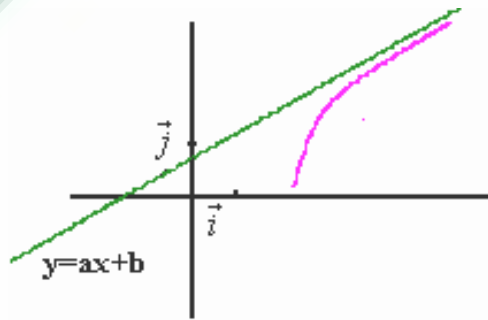
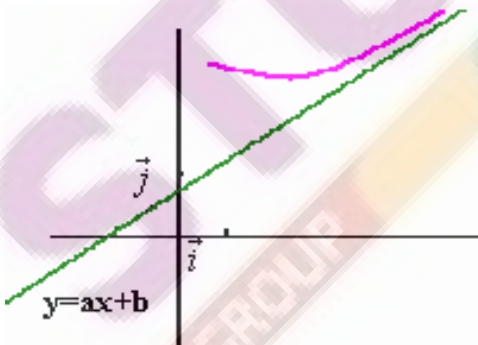
تقنية تحديد مقارب مائل

لنفترض أن $f(x) = ax + b + h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + h(x)) = b \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x} h(x) \right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{فإن} \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right)$$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right)$ أو $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right)$



ملاحظة دراسة إشارة $(f(x) - (ax + b))$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

مثال

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x} - 2$$

حدد المقارب المائل بجوار $+\infty$ ثم بجوار $-\infty$

تعريف

أ - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتاب.

ب - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الافاصيل.

ج - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ نقول إن (C_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه المستقيم ذا المعادلة $y = ax$.

صفة عامة

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $y = ax$ كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل - محور تماثل

3-1 محور تماثل

إذا كان (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x = a$ كمحور تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\Omega(a; 0)$

هي على شكل $Y = f(a + X) = \varphi(X)$ حيث φ دالة زوجية و $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X) = \varphi(X) \quad \forall X \in D_\varphi$

أي $f(a - X) = f(a + X) \quad \forall X \in D_\varphi$

بما أن $X = x - a$ فإن $f(2a - x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f ; \quad f(2a - x) = f(x)$$

3-2 مركز تماثل

إذا كان (C_f) يقبل النقطة $\Omega(a; b)$ كمركز تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

هي على شكل $Y + b = f(a + X)$

أي $Y = f(a + X) - b = \varphi(X)$

حيث φ دالة فردية و $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X) = -\varphi(X) \quad \forall X \in D_\varphi$

أي $f(a - X) - b = -f(a + X) + b \quad \forall X \in D_\varphi$

أي $f(a - X) = 2b - f(a + X) \quad \forall X \in D_\varphi$

بما أن $X = x - a$ فإن $f(2a - x) = 2b - f(x) \quad \forall x \in D_f$

خاصية

في معلم ما, تكون النقطة $\Omega(a; b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f ; \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

تمرين

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ بين أن المستقيم $x = 1$: محور تماثل للمنحنى (C_f)

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$ بين أن النقطة $\Omega(1; 2)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

4- الدالة الدورية

1-4 تعريف

نقول أن دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعاً بحيث
 $\forall x \in D_f \quad x + T \in D_f ; \quad x - T \in D_f \quad f(x + T) = f(x)$
 العدد T يسمى دور الدالة f . اصغر دور موجب قطعاً يسمى دور الدالة

أمثلة

* الدالتان $x \rightarrow \sin x$ و $x \rightarrow \cos x$ دوريتان و دورهما 2π
 * الدالة $x \rightarrow \tan x$ دورية دورها π

* الدالتان $x \rightarrow \sin ax$ و $x \rightarrow \cos ax$ (حيث $a \neq 0$) دوريتان و دورهما $\frac{2\pi}{|a|}$

* الدالة $x \rightarrow \tan ax$ (حيث $a \neq 0$) دورية دورها $\frac{\pi}{|a|}$

تمرين

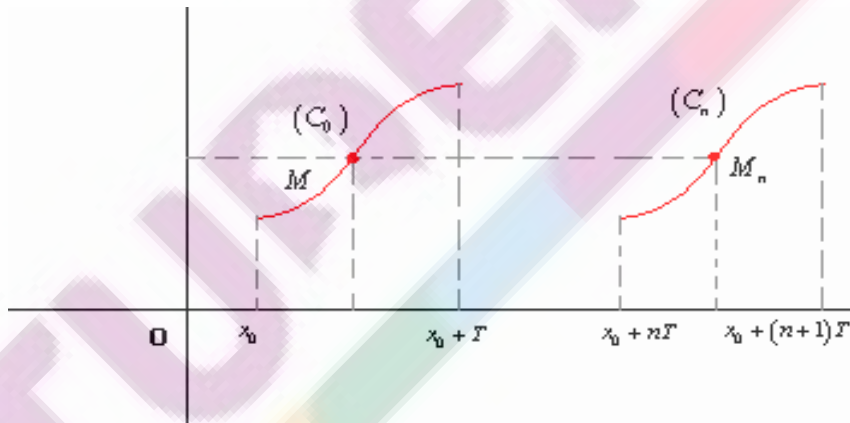
حدد دورا للدوال $x \rightarrow \cos x - \sin x$ و $x \rightarrow 3 - \cos \frac{1}{4}x$ و $x \rightarrow \tan 3x$ و $x \rightarrow \cos^2 x$

4-2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فإن $\forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(x + nT) = f(x)$

(نبين الخاصية بالاستدلال بالترجع)
 3-4 التمثيل المبياني لدالة دورية

لتكن f دورية دورها T و (C_f) منحنها في مستوى منسوب ال معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$



منحنى الدالة f على $[x_0 + nT; x_0 + (n+1)T]$ هو صورة منحنى الدالة على $[x_0; x_0 + T]$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT \cdot \vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسبي.

ملاحظة:

لإنشاء منحنى دالة دورية يكفي إنشائه جزئه على مجال من نوع $I_0 = D_f \cap [x_0; x_0 + T]$
 استنتاج المنحنى باستعمال الإزاحة $t_{n\vec{i}}$

أمثلة

* دالة $x \rightarrow \cos x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $[-\pi; \pi]$

و حيث أن $x \rightarrow \cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على $[0; \pi]$

$$\forall x \in [0; \pi] \quad (\cos x)' = -\sin x$$

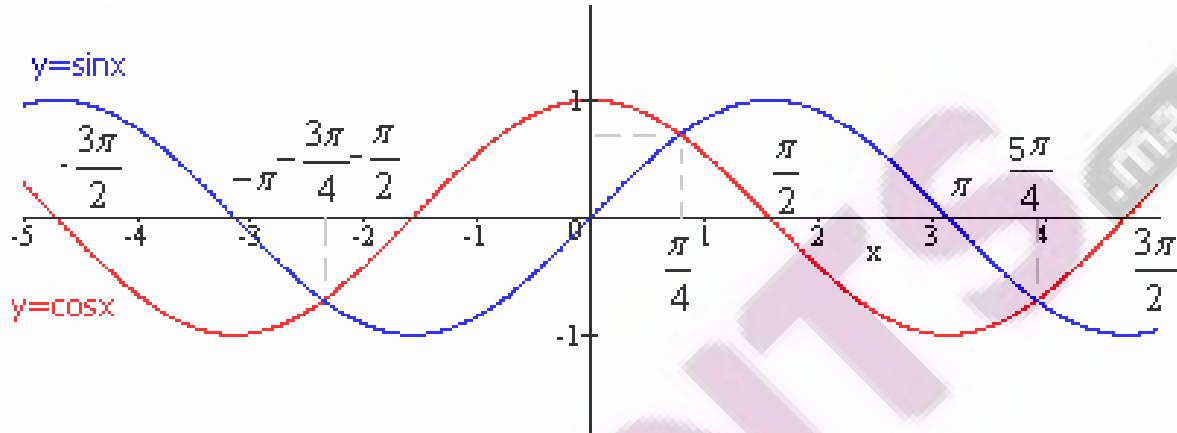
جدول التغيرات

x	0	π
$\cos x$	1	-1

دالة $x \rightarrow \sin x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $]-\pi; \pi]$
و حيث أن $x \rightarrow \sin x$ فردية فنقتصر دراستها على $[0; \pi]$
 $\forall x \in [0; \pi] \quad (\sin x)' = \cos x$

جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1	0



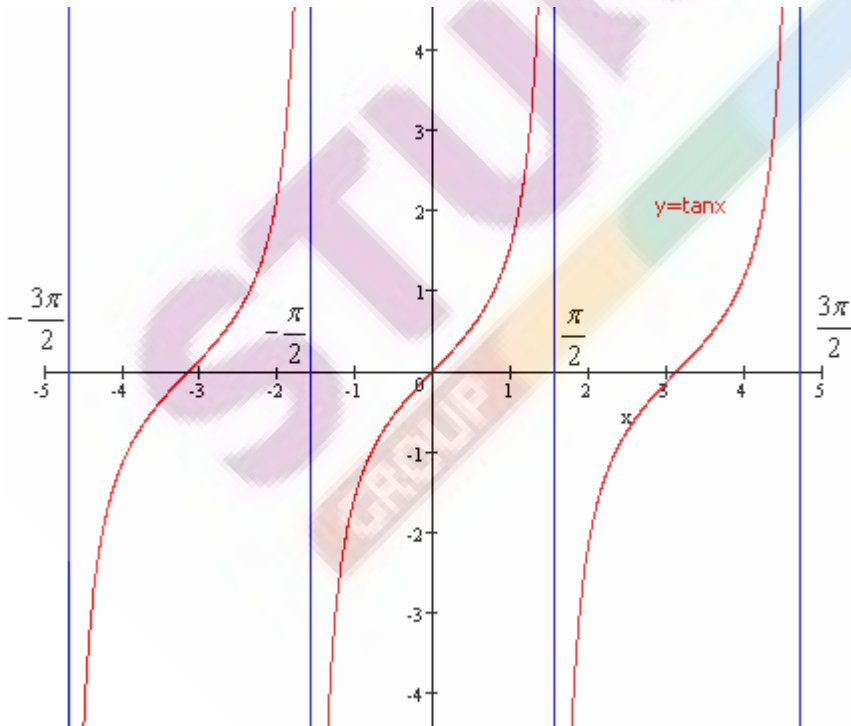
** دالة $x \rightarrow \tan x$ حيز تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ و دورية ودورها π إذن يكفي دراستها على $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

و حيث أن $x \rightarrow \tan x$ فردية زوجية فنقتصر دراستها على $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\quad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$+\infty$



تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع النهائية
- دراسة التقعر إن كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى

تمارين

أدرس ومثل مبيانيا الدالة f في الحالات التالية

$$c) : f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \quad b) : f(x) = \frac{2|x|}{x^2 + 1} \quad a) : f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$$

تمارين و حلولها

تمرين 1

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 2}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج) حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

2- أ) بين أن $\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

ب) أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0

4- بين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 2}$$

أ) نحدد D_f

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

ب) نحدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{1}{x - 2} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{1}{x - 2} = +\infty$$

ج) حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 + \frac{1}{x - 2} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 1 + \frac{1}{x - 2} = +\infty$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f)

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \quad \text{أ) نبين أن}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

f دالة قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R} - \{2\}$ (لأن f دالة جذرية)

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

ب) ندرس تغيرات f و نعطي جدول تغيراتها

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-3)(x-1)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

3- نحدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0 هي $y = f'(0)x + f(0)$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \quad \text{أي هي}$$

4- نبين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad 4 - x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$2 - f(x) = 2 - x + 1 - \frac{1}{x-2} = 3 - x + \frac{1}{2-x} \quad ; \quad f(4-x) = 3 - x + \frac{1}{2-x}$$

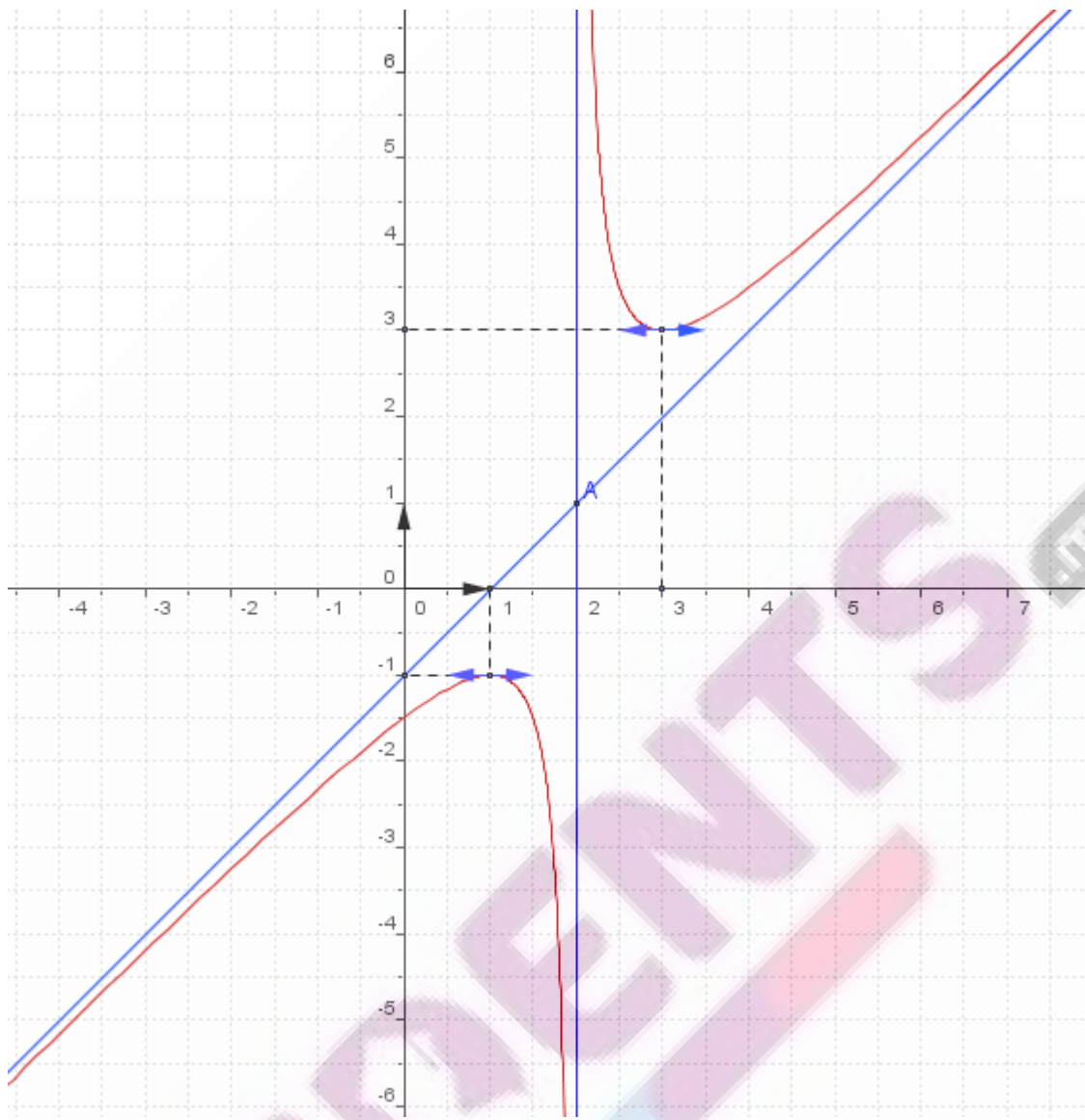
ومنه $f(4-x) = 2 - f(x)$ إذن $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- نشئ (C_f)



تمرين 2

$$f(x) = 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

1- حدد D_f و حدد نهايات f عند محداث D_f

2- حدد $f'(x)$ لكل x من D_f

3- أدرس تغيرات f

4- أ- بين أن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ كنقطة انعطاف.

ب- بين أن $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

5- أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ المنحنى C_f

الحواب

$$f(x) = 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

2- نحدد D_f و نحدد نهايات f عند محداث D_f

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad \text{et} \quad x \neq 2$$

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[\quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-2x}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{x} = 0 \quad \text{ولأى} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 1-2x = -3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2-x-2 = 0 \quad \text{لدينا}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty \quad \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 1-2x = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -1} x^2-x-2 = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty \quad \text{ومنه}$$

2- نحدد $f'(x)$ لكل $x \in D_f$

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(x^2-x-2) - (x^2-x-2)'(1-2x)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-x-2) - (2x-1)(1-2x)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 4 + 4x^2 - 4x + 1}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2-x-2)^2}$$

3- ندرس تغيرات f

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2-x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x^2 - 2x + 5$

$$\Delta = 4 - 40 = -36$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2x^2 - 2x + 5 > 0 \quad \text{إذن}$$

جدول التغيرات f

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$ $	$+$	$+$
f	$1 \nearrow +\infty$	$ $	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$

4- أ- نبين أن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ كنقطة انعطاف.

$$\forall x \in D_f \quad f''(x) = \frac{-2(2x-1)(x^2-x+7)}{(x^2-x-2)^3}$$

$f''(x)$ تنعدم في $\frac{1}{2}$ مع تغيير الإشارة إذن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ كنقطة انعطاف

ب- نبين أن $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

$$\forall x \in D_f \quad 1-x \in D_f$$

$$f(1-x) = 1 + \frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2 - (1-x) - 2} = 1 - \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

$$2-f(x) = 2 - 1 - \frac{1-2x}{x^2-x-2} = 1 - \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

إذن $f(1-x) = 2-f(x)$ ومنه $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- نحدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I هي $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$

$$\text{أي } y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9} \text{ ومنه } y = \frac{8}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$$

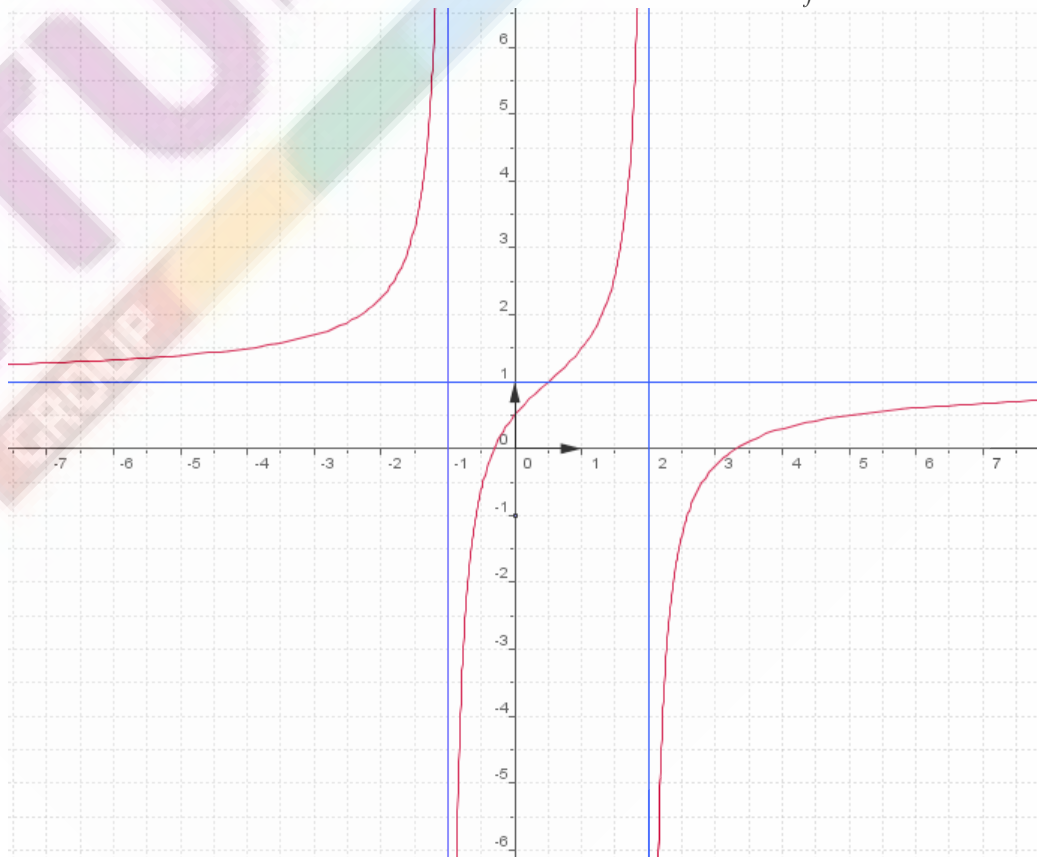
5- أ- ندرس الفروع اللانهائية

لدينا $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

لدينا ومنه $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى C_f

لدينا ومنه $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى C_f

ب- ننشئ المنحنى C_f



$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$1- \text{ حدد } D_f \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

2- أ- بين أن f دالة دورية و حدد دورها
ب تأكد أن f زوجية استنتج D_E مجموعة دراسة f

3- أدرس تغيرات f على D_E

4- أنشئ المنحنى C_f

الجواب

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$5- \text{ نحدد } D_f \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{اذن } D_f = \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

6- أ- نبين أن f دالة دورية و حدد دورها

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad 2\pi + x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad x - 2\pi \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{اذن } f \text{ دالة دورية و حدد دورها } 2\pi \quad f(x+2\pi) = \frac{1 + \cos(x+2\pi)}{1 - \cos(x+2\pi)} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = f(x)$$

ب- نتأكد أن f زوجية نستنتج D_E مجموعة دراسة f

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad -x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

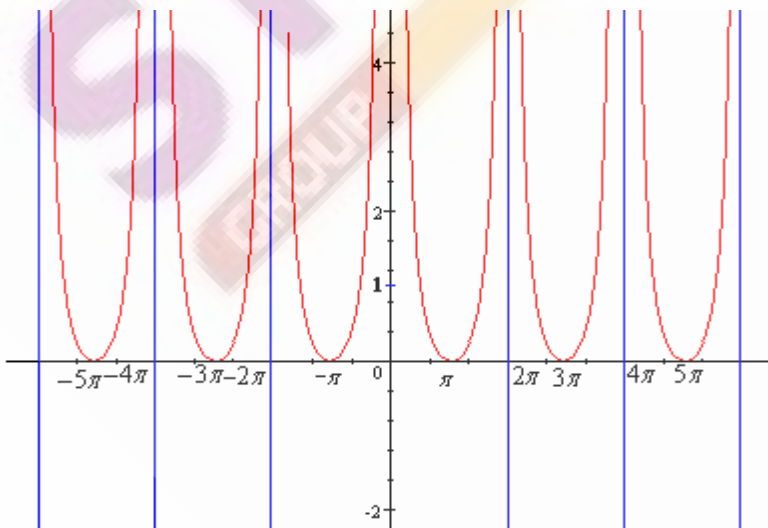
$$\text{ومنه } D_E =]0; \pi] \quad \text{اذن } f \text{ زوجية} \quad f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{1 - \cos(-x)} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = f(x)$$

7- ندرس تغيرات f على D_E

$$\forall x \in]0; \pi] \quad f'(x) = \frac{(-\sin x)(1 - \cos x) - (1 + \cos x)\sin x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-2\sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

x	0	π
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	$+\infty$	0

8- أنشئ المنحنى C_f



نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) بين أن f دالة فردية

د) بين أن f دورية دورها 2π

ج) بين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ثم حدد $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

2- أ) بين أن $\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$

ب) أدرس تغيرات f على $]0; \pi[$ و أعط جدول تغيراتها

3- أ) حدد تقعر (C_f)

ب) أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

2- أ) نحدد D_f

$$D_f = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

ب) نبين أن f دالة فردية

لدينا $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} : -x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$$f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{1 - \cos x}{-\sin x} = -\frac{1 - \cos x}{\sin x} = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

د) نبين أن f دورية دورها 2π

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad x + 2\pi \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1 - \cos(x + 2\pi)}{\sin(x + 2\pi)} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = f(x)$$

f دورية دورها 2π

ملاحظة: بما أن f دورية دورها 2π و f دالة فردية فان مجموعة الدراسة هي $D_E =]0; \pi[$

ج) نبين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ثم نحدد $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \pi$ مقارب للمنحنى (C_f)

2- أ) نبين أن $\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{\sin^2 x - (1 - \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

ب) ندرس تغيرات f على $]0; \pi[$ و نعطي جدول تغيراتها

$$\forall x \in]0; \pi[\quad 1 + \cos x > 0 \quad \text{لأن } \forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) > 0$$

ومنه f تزايدية على $]0; \pi[$

x	0	π
f	0	$+\infty$

3- أ) نحدد تقعر (C_f)

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1 + \cos x} \quad \text{لدينا}$$

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f''(x) = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

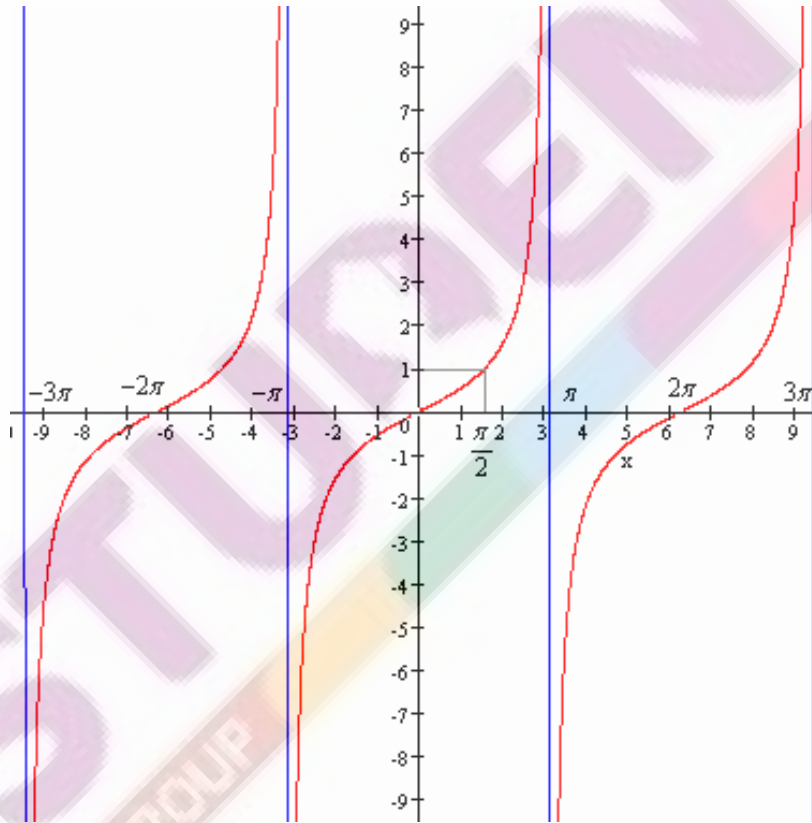
x	0	π
$f''(x)$		+

إذن (C_f) محدب على $]0; \pi[$ و حيث f فردية فان (C_f) مقعر على $]-\pi; 0[$

وبما أن f دورية دورها 2π فان (C_f) محدب على كل مجال من شكل $]2k\pi; \pi + 2k\pi[$ و مقعر على

$]-\pi + 2k\pi; 2k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ب) ننشئ (C_f)



تمارين و حلول

تمرين 1

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| > 1 \end{cases}$$

- 1- أ) أدرس اتصال في النقطتين 1 و -1
ب) أدرس اشتقاق f في النقطتين 1 و -1 و أول النتائج هندسيا
- 2- أ) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
ب) أدرس تغيرات f
- 3- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.
- 5- أدرس تقعر C_f
- 6- أنشئ C_f

الجواب

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| > 1 \end{cases}$$

- 4- أ) ندرس اتصال في النقطتين 1 و -1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \quad \text{اذن } f \text{ متصلة في } 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \sqrt{1-x^2} = -1$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \quad \text{اذن } f \text{ متصلة في } -1$$

ب) ندرس اشتقاق f في النقطتين 1 و -1 و نؤول النتائج هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - \sqrt{1-x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \sqrt{\frac{1}{1-x}} \sqrt{x+1} = +\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يسار 1 و منحني f يقبل نصف مماس عمودي على يسار 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} + \frac{\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يمين 1 و منحني f يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$ على يمين 1

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - \sqrt{1-x^2} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - \sqrt{\frac{1}{1+x}} \sqrt{1-x} = -\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يمين -1 و منحني f يقبل نصف مماس عمودي على يمين -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2} + \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2} + \frac{x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يسار -1 و منحني f يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$ على يسار -1

5- أ) نحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$\forall x \in]-1;1[\quad f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2+1-2x^2}{x^2+1} = \frac{2}{2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$

ب) ندرس تغيرات f

$$\forall x \in]-1;1[\quad f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{(\sqrt{1-x^2}-x)\sqrt{1-x^2}} \quad \text{لدينا}$$

$$\forall x \in [0;1[\quad f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]-1;1[\quad f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{(\sqrt{1-x^2}-x)\sqrt{1-x^2}}$$

إشارة $f'(x)$ على $]-1;0[$ هي إشارة $1-2x^2$ على $]-1;0[$

$$x \in]-1;0[\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\forall x \in \left] -1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[\quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right[\quad f'(x) > 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
f	$-\infty$	-1	$-\sqrt{2}$	1	$+\infty$

6- ندرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ومنه المستقيم } (D) \text{ ذا المعادلة } y = \frac{1}{2}x \text{ مقارب للمنحنى}$$

C_f

$$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\quad f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x}{x^2+1}$$

ومنه C_f فوق (D) على $]1;+\infty[$ و C_f تحت (D) على $]-\infty;-1[$

5- ندرس تقعر C_f

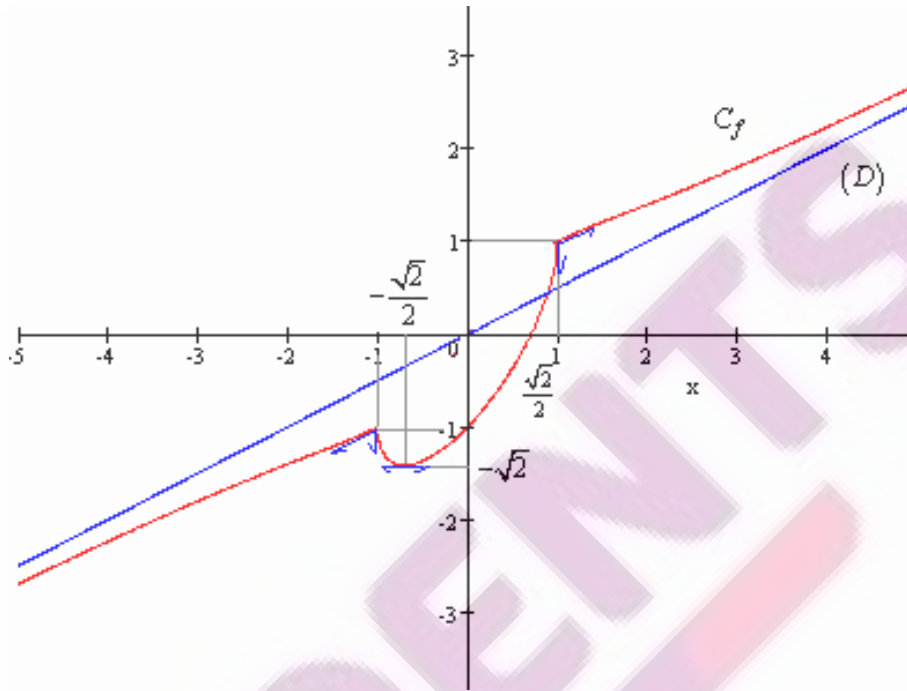
$$\forall x \in]-1;1[\quad f''(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$$

$$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\quad f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} : \text{ومنه}$$

$$]1; +\infty[\quad \forall x \in]1; +\infty[\quad f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} < 0 \quad C_f \text{ مقعر على}$$

$$]-\infty; -1[\quad \forall x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) > 0 \quad C_f \text{ محدب على}$$

-6 ننشئ C_f



تمرين 2

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

- 1- حدد D_f حيز تعريف الدالة f
- 2- أ- بين أن دور للدالة f هو 2π
ب- بين أن $f(x + \pi) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$
- 3- أحسب $f'(x)$
- 4- أدرس تغيرات f على $[0; \pi] \cap D_f$
- 5- أنشئ منحنى قصور الدالة f على $[0; 2\pi] \cap D_f$

الجواب

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

- 3- نحدد D_f
ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos x \neq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left(x \neq k\pi \quad \text{et} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{اذن}$$

4- أ- بين أن دور الدالة f

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{\sin(x+2\pi)} + \frac{1}{\cos(x+2\pi)} = f(x)$$

اذن دور الدالة f

$$\forall x \in D_f \quad f(x+\pi) = -f(x) \quad \text{ب- نبين أن}$$

$$\forall x \in D_f \quad f(x+\pi) = \frac{1}{\sin(x+\pi)} + \frac{1}{\cos(x+\pi)} = \frac{1}{-\sin x} + \frac{1}{-\cos x} = -f(x)$$

3- نحسب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \cos x \cdot \sin x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x) \left(1 + \frac{\sin 2x}{2} \right)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

4- ندرس تغيرات f على $[0; \pi] \cap D_f$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x - \cos x$

$$x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[\quad \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	+	+
f	$+\infty$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$	$+\infty$

5- ننشئ منحنى قصور الدالة f على $[0; 2\pi] \cap D_f$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = \pi \text{ مقارب للمنحنى } C_f$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = \frac{\pi}{2} \text{ مقارب للمنحنى } C_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = 0 \text{ مقارب للمنحنى } C_f$$

$$\text{ننشئ } C_f \text{ على } \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[\text{ ونستنتج الجزء الآخر على } \left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[\text{ حيث } f(x+\pi) = -f(x)$$

