

المتجهات في الفضاء

(I) تساوي متجهتين - جمع المتجهات

1- عناصر متجهة

A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو اتجاه المستقيم (AB)
- منحنى $\vec{u}$ هو المنحنى من A إلى B
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة AB و نكتب: $AB = \|\vec{u}\|$

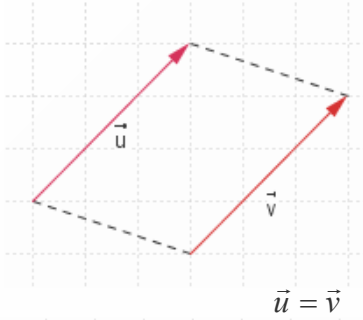
ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم.

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب

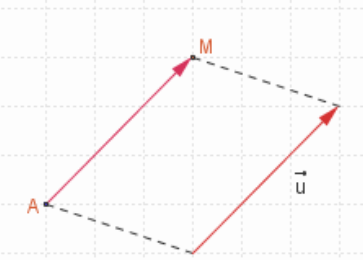
2- تساوي متجهتين

تعريف

تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحنى و نفس المنظم



$$\vec{u} = \vec{v}$$



لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء و لكل نقطة A في الفضاء توجد نقطة وحيدة M حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

خاصية

$ABCD$ رباعيا في الفضاء

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان

خاصية

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (تبديل الوسطين)
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ (تبديل الطرفين)

3- مجموع متجهتين - علاقة شال

أ- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان في الفضاء

لتكن A نقطة من الفضاء،

توجد نقطة وحيدة B حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

توجد نقطة وحيدة C حيث $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

النقطتان A و C تحددان متجهة

وحيدة $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

المتجهة $\vec{w}$ هي مجموع المتجهتين

$\vec{u}$ و $\vec{v}$

نكتب $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

ب- علاقة شال

مهما كانت النقط A و B و C من الفضاء

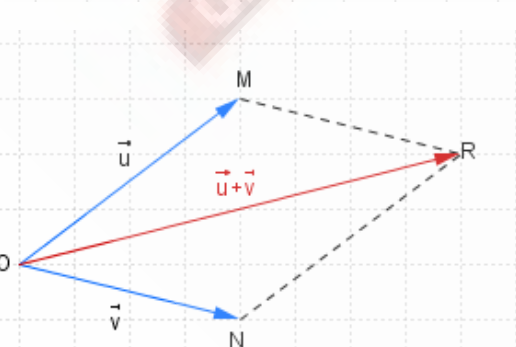
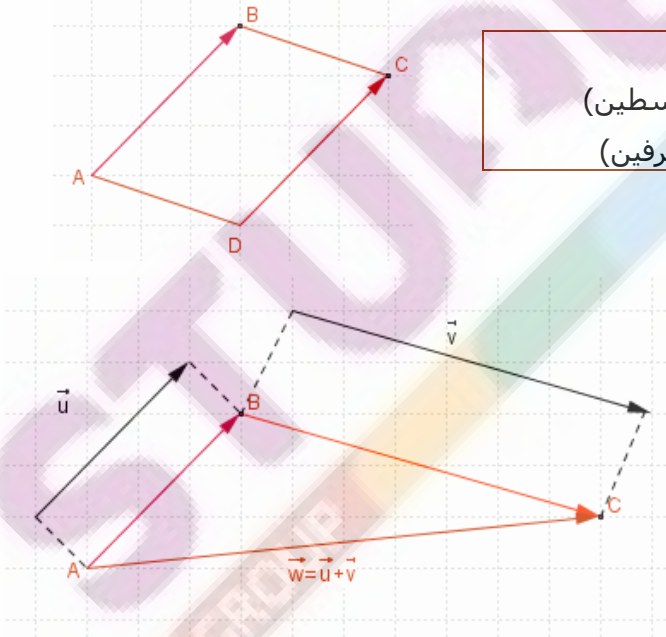
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

نتيجة

لتكن O و M و N و R أربع نقط من الفضاء
 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$ إذا وفقط إذا كان $OMRN$ متوازي الأضلاع

ملاحظة: إذا كانت $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ فان

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$ حيث $OMRN$ متوازي الأضلاع



ج- خاصيات

- * لكل متجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- * لكل ثلاث متجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- * لكل متجهة $\vec{u}$ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

أ- مقابل متجهة - فرق متجهين مقابل متجهة

لتكن $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة في الفضاء
مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحاه مصاد لمنحى
المتجهة $\vec{u}$ نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$

- * لكل متجهة $\vec{u}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
- * لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$
- المتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{BA}$ متقابلتان نكتب $\vec{AB} = -\vec{BA}$

ب- فرق متجهين تعريف

لكل متجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط A و B و C $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

أمثلة

مكعب ABCDEFGH

$$\vec{ED} + \vec{EF} = \vec{EC}$$

$$\vec{BC} = -\vec{HE}$$

$$\vec{AB} = \vec{HG}$$

4- منتصف قطعة

I منتصف [AB] إذا وفقط إذا كان $\vec{AI} = \vec{IB}$ ($\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$)

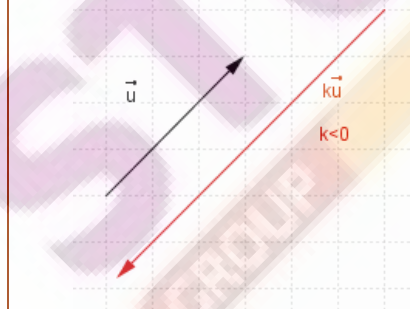
(II) الاستقامية- التعريف المتجهي للمستقيم

1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

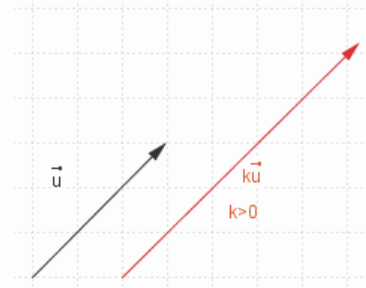
تعريف

$\vec{u}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي غير منعدم
جداء المتجهة $\vec{u}$ في العدد الحقيقي k هي المتجهة $k\vec{u}$ حيث :
* $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه
* $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

* منحنى $k\vec{u}$ هو
← منحنى $\vec{u}$ إذا كان $k > 0$
← عكس منحنى $\vec{u}$ إذا كان $k < 0$



$k < 0$



$k > 0$

* لكل متجهة $\vec{u}$ و لكل عدد حقيقي k : $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ و $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و مهما يكن العددين الحقيقيين α و β فان

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

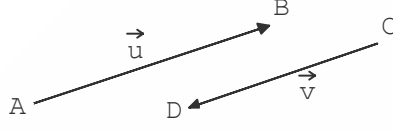
$$(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

$\alpha\vec{u} = \vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$

3- الاستقامية استقامية متجهتين أ- تعريف

تكون متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين إذا و فقط كانت احدهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



ملاحظة

$\vec{0}$ مستقيمة مع أية متجهة

استقامية ثلاث نقط

تعريف

لتكن A و B و C نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$
تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي α حيث $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

نوازي مستقيمين

لتكن A و B و C و D نقطا من الفضاء حيث $A \neq B$ و $C \neq D$
(AB) // (CD) إذا و فقط إذا كان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مستقيمتين

التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء

تعريف

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء
كل متجهة $\vec{u}$ غير منعدمة و مستقيمة مع المتجهة $\vec{AB}$
تسمى متجهة موجهة للمستقيم (AB)

خاصية

لتكن A نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{AM} = \alpha \vec{u}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$
هي المستقيم المار من A و الموجه بـ $\vec{u}$. نرمز له بالرمز $D(A; \vec{u})$

$$D(A; \vec{u}) = \{M \in (E) / \vec{AM} = \alpha \vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا نضع $\vec{AB} = \vec{i}$ و $\vec{AD} = \vec{j}$ و $\vec{AE} = \vec{k}$
و $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. نعتبر I منتصف $[HG]$

1- بين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2- ليكن المستقيم (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) و نقطة M من الفضاء حيث

$$\vec{BM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2\vec{BG}$$

الجواب

1- نبين أن $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

أي نبين أن $\vec{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيمتين

لدينا I منتصف $[HG]$ ومنه $\vec{HI} = \frac{1}{2} \vec{HG}$

$$\vec{AI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \frac{1}{2} \vec{HG}$$

بما أن $ABCDEFGH$ مكعب فان $\vec{EH} = \vec{AD} = \vec{j}$ و $\vec{HG} = \vec{AB} = \vec{i}$

$$\vec{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{i} = \frac{1}{2} (\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{1}{2} \vec{u}$$

إذن $\vec{AI}$ و $\vec{u}$ مستقيمتان و منه $\vec{u}$ موجهة للمستقيم (AI)

2 نبين أن $M \in (\Delta)$

لدينا (Δ) المار من G و الموازي للمستقيم (AI) أي $(\Delta) = D(G; \vec{u})$

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$$

بما أن $ABCEFGH$ مكعب فإن $\overrightarrow{GF} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{j}$ و $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{AE} = -\vec{k}$ و $\overrightarrow{BC} = \vec{j}$ و $\overrightarrow{CG} = \vec{k}$ و $\overrightarrow{GM} = -\vec{j} - \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{u}$

و بالتالي $M \in D(G; \vec{u})$ إذن $M \in (\Delta)$

III الاستوائية- التعريف المتجهي للمستوى

1- تعريف

ليكن (P) مستوى من الفضاء و A و B و C نقط غير مستقيمة من المستوى (P)
نقول إن (P) هو المستوى المار من A و الموجه بالمتجهين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

نتيجة

متجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا (P) هو المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نرمز له بالرمز $P(A; \vec{u}; \vec{v})$.

خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيمتين و نقطة A من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ و $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ هي المستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نكتب $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$

2- الاستوائية

تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات في الفضاء
نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط وجدت أربع نقط مستوائية A و B و C و D حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

أمثلة

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ مستوائية لان النقط B

و C و E و H مستوائية $[(BC) \parallel (EH)]$

$\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مستوائية لأن $BDEH$ رباعي الأوجه

خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيمتين و $\vec{w}$ متجهة في الفضاء
المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

نتيجة

إذا وجد عددين حقيقيين x و y حيث $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ فإن A و B و C و M مستوائية

تمرين

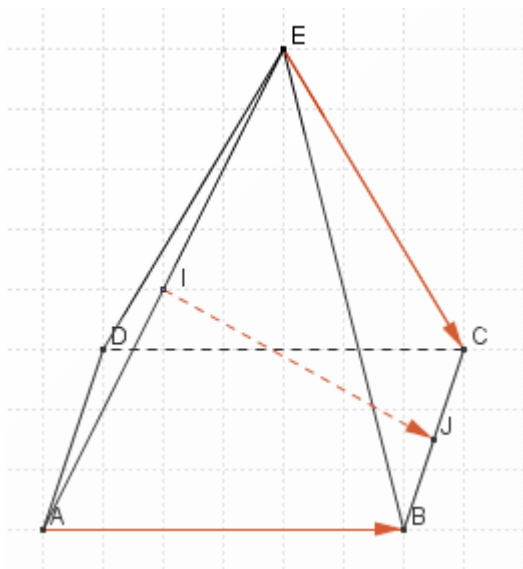
$EABCD$ هرم قاعدته المستطيل $ABCD$ ، I و J منتصف $[AE]$ و $[BC]$ على التوالي.

بين أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية

الحل

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$

و حيث I و J منتصف $[AE]$ و $[BC]$ فإن :



$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \text{ و بالتالي}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \text{ ومنه}$$

إذن $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية