

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس النهايات

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

I. تذكير

تمرين 1: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x} \quad (4) \quad f(x) = \frac{5x+10}{x^2-9} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^3}{2x-4} \quad (2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} \quad (7) \quad f(x) = \sqrt{2x-4} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x-5}{2x^2-3x+1} \quad (5)$$

تمرين 2: أدرس زوجية الدالة f في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^4-2}{2x^2-1} \quad (4) \quad f(x) = 2x^5-3x \quad (3) \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad (2) \quad f(x) = 2x^2 \quad (1)$$

تمرين 3: نعتبر الدوال f و g المعرفة كالتالي: $g(x) = \frac{3x}{9x^2-1}$

(1) حدد (D_g) مجموعة تعريف الدالة g .

(2) أدرس زوجية الدالة g .

تمرين 4: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{3}{2}x^2$.

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أدرس رتبة الدالة f على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$ وحدد جدول تغيرات الدالة f .

(3) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

II. نهاية منتهية في نقطة

أنشطة: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = 2x$.

املا الجدول التالي:

x	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	2	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	2
$f(x)$											

نلاحظ أنه عندما تقترب x من 0 فإن $f(x)$ تقترب أيضا من 0

نقول: عندما نؤول x إلى 0 فإن $f(x)$ نؤول إلى 0 ونكتب: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

III. نهاية غير منتهية في نقطة

أنشطة: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{1}{x}$.

املا الجدول التالي:

x	-2	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	2
$f(x)$						×					

■ نلاحظ أنه عندما تقترب x من 0 من اليمين فإن $f(x)$ تكبر

نقول : عندما تؤول x إلى 0^+ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

■ نلاحظ كذلك أنه عندما تقترب x من 0 من اليسار فإن $f(x)$ تصغر

نقول : عندما تؤول x إلى 0^- فإن $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

نتيجة مهمة : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

أمثلة : أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ (6)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

تمرين : أحسب النهايات التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{2x-4} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{2x-4} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{-2x+6} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$$

IV. نهاية منتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

أنشطة : لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x}$

املاً الجدول التالي :

x	-10000	-1000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1000	10000
$f(x)$						×					

■ نلاحظ أنه عندما تكبر x أي تقترب x من $+\infty$ فإن $f(x)$ تقترب من 0 من اليمين

نقول : عندما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى 0^+ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

■ نلاحظ كذلك أنه عندما تصغر x أي تقترب x من $-\infty$ فإن $f(x)$ تقترب من 0 من اليسار

نقول : عندما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى 0^- ونكتب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$

نتيجة مهمة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

أمثلة : أحسب النهايات التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5} \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^2}$$

V. نهاية غير منتهية في $+\infty$ أو $-\infty$

أنشطة : لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x) = 2x$

املاً الجدول التالي :

x	-10000	-1000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1000	10000
$f(x)$						0					

■ نلاحظ أنه عندما تكبر x أي تقترب x من $+\infty$ فإن $f(x)$ تكبر أي تقترب x من $+\infty$

نقول : عندما تؤول x إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

■ نلاحظ كذلك أنه عندما تصغر x أي تقترب x من $-\infty$ فإن $f(x)$ تصغر أي تقترب من $-\infty$

نقول : عندما تؤول x إلى $-\infty$ فإن $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

أمثلة : أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3$ (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^4$

VI. العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عدنان حقيقيان , وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

1. النهاية و الجمع:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

2. النهاية و الضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$	0	
$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

3. النهاية و المقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4. النهاية و الخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ أو $l < 0$	$+\infty$ أو $l > 0$	$+\infty$ أو $l > 0$	$-\infty$ أو $l < 0$	$-\infty$	0	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	$l < 0$	0	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	

أمثلة : أحسب النهايات التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} 3 + x - 3x^2 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{3x^2-x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 4 \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} |-x^2 + 2x - 7| \times \sqrt{x+7} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-5}{|x-4|} \quad (6)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \quad (8) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 + \frac{2}{x} - 3 \quad (9) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 + \frac{2}{x} - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^5 + \frac{-7}{x} + 1$$

5. نهاية الدالة الحدودية و الجذرية

- نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة
- نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

أمثلة : أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{x \rightarrow -1} 3 + x - 3x^2$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{3x^2-x}$

6. نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[a; +\infty[$ بحيث $\forall x \in [a; +\infty[f(x) \geq 0$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $l \geq 0$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

ملاحظة: هذه خاصية تبقى صالحة إذا كان تؤول x إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى اليسار

أمثلة: أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 4}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2} |-x^2 + 2x - 7| \times \sqrt{x+7}$

تمرين 1: أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 3x + 4$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^3 - 7x + 2$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{4x^3 + 5x - 1}$ (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + x^2 + 2}{x^3 + x - 3}$

تمرين 2: أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)^{2008} \times (x^3 + 1)^{2009}$ (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$