الفهرس

تمرين 1:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

1- أ-) تحقق أن : $D_f=]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$

ب-) احسب نهايات f عند محدات D_f

2- أ-) ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في -1 .

ب-) بين أن لكل x من $Df=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$: $f'(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

ج-) اعط جدول تغيرات الدالة f.

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i};\vec{j})$.

أ-) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب-) انشيء (C) .

تمرين 2:

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty,4]$ بما يلي :

$$f(x)=x-4+2\sqrt{4-x}$$

(C) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j})$

1- بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_0=4$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصلة .

3- أ-) بين أنه لكل x من $]-\infty,4[$: $f'(x)=\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{4-x}}$

ب-) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f .

4- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

5- حدد نقط تقاطع المنحنى (C) ومحور الأفاصيل .

6- اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الأفصول 0.

7- احسب $f(-5)$ ثم انشيء المستقيم (T) والمنحنى (C) (الوحدة 1cm) .

تمرين 3:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x)=\frac{1}{x^2+x}-\sqrt{x^2+x}$

و (C) منحناها في معلم متعامد منظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- بين أن $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ هي مجموعة تعريف الدالة f .

2- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

3- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تماثل ل (C) .

4- بين أن $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ f'(x)=-(2x+1)\left(\frac{1}{(x^2+x)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\right)$

5- ضع جدول تغيرات الدالة f في المجال $]0,+\infty[$.

6- حدد الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$

7- حل في $]0,+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$.

8- أنشىء (C).

تمرين 4:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$

(C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- حدد D حيز تعريف f واحسب نهايتي f عند محدي D .

2- حدد الفرعين اللانهائيين ل (C) .

3- أ- احسب $f'(x)$ وتحقق أنه لكل x من D : $f'(x)=x(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

ب- حدد جدول تغيرات f .

4- أ- احسب $f''(x)$ لكل x من D .

ب- بين أن $A\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ نقطة انعطاف (C) .

5- أنشىء (C) وحدة القياس : 2 cm.

6- لتكن g قصور f على المجال $I=\left]-\frac{1}{2},0\right]$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 5:

-I نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x بحيث : $h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}$

1- اعط جدول تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}^+$.

2- استنتج أن : $h(x) \leq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$

-II لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $R = (O,\vec{i},\vec{j})$ الوحدة : 2 cm

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$ على اليمين واعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

2- أ) بين أن : $f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$

ب) اعط جدول تغيرات f (لحساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$ يمكنك استعمال المتساوية : $f(x) = x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - 4 + \frac{1}{2x^2}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$) .

ج) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) .

3- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[\frac{1}{4},+\infty\right[$.

أ) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده .

ب) استنتج أن المعادلة $g(x) = 0 \quad x \in I$ تقبل حلا وحيدا α ثم تحقق من أن $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

4- انشيء في نفس المعلم R المنحنى (C) الممثل للدالة f والمنحنى (Γ) الممثل للدالة العكسية g^{-1} للدالة g (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$) .

تمرين 6:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

1- حدد نهاية f عند $+\infty$ ونهايتها عند $-\infty$

2- أ) ادرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين في 1 وعلى اليسار في 1- واعط تأويلا هندسيا للنتيجتين .

ب) حدد الدالة المشتقة للدالة f .

ج) بين أن $f'(x) > 0$ لكل x من $]1,+\infty[$ وأن $f'(x) < 0$ لكل x من $]-\infty,-1[$

د) ضع جدول تغيرات f.

3- أ) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب) أنشيء المنحنى (C).

4- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1,+\infty[$.

أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال ينبغي تحديده .

ب) انشيء المنحنى الممثل للدالة g^{-1} في المعلم أعلاه .

تمرين 7:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=2x-\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

ب- بين أن الدالة f فردية . نأخذ $I=]0,+\infty[$ مجال دراسة الدالة f .

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

3- أ- بين أنه لكل x من I : $f(x)-(2x-1)=\frac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$

ب- استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ج- حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) على I .

4- أ- بين أنه لكل x من I : $f'(x)=2+\frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على I .

5- أ- حدد نقطة تقاطع (C) مع محور الأفاصيل على المجال I. ثم اعط معادلة المماس للمنحنى (C) في هذه النقطة .

ب- نقبل أن إشارة $f''(x)$ هي عكس إشارة x لكل x من D . وأن قيمة مقربة للعدد الموجب α الذي يحقق $f(\alpha)=\alpha$ هي 1,52 . أنشىء (C) . (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$) معللا إنشاءك على المجال $]-\infty,0[$.

6- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال ينبغي تحديده .

ب- أنشىء (C') منحنى g^{-1} الدالة العكسية للدالة g (في نفس المعلم).

تمرين 8:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[-2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2\sqrt{(x+2)(x-3)^2}$

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\frac{f(x)}{x+2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{f(x)}{x-3}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\frac{f(x)}{x-3}$

2- أ- بين أن إشارة $f'(x)$ على $]-2,3[$ هي إشارة $(1-2x)$ ، وأن f' موجبة قطعا على $]3,+\infty[$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

وليكن (D) المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$.

أ- بين أن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على المجال $]3,+\infty[$

ج- ارسم (C) .

تمرين 9:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ وأول النتيجة هندسيا .

3- ادرس قابلية اشتقاق f في -2 على اليسار و في 0 على اليمين .

4- أ- بين أنه لكل x من $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

ب- استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ وتناقصية قطعا على $]-\infty,-2]$

5- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب- أنشيء (C) .

6- ليكن g قصور الدالة f على $[0,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب- لكل x من J حدد $g^{-1}(x)$ بدلالة x .

تمرين 10:

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-a- حدد D حيز تعريف الدالة f .

b-احسب كلا من النهايات التالية:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)$

2-a – تحقق من أن :

$$\forall x\in D: f(x)-(\frac{x+1}{2x})=\frac{x+1}{2x}(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x})$$

b- استنتج أن المستقيم $(\Delta_1): y=\dfrac{x+1}{2}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$

C – بين أن $(\Delta_2): y=-\dfrac{x+1}{2}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $-\infty$

3-a- بين أن $f'(x)=\dfrac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$ لكل x من D .

b- تحقق من أن f تزايدية على المجال $]3,+\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,3]$.

c- اعط جدول تغيرات الدالة f .

4-a – حدد تقاطع (C) مع محور الأفاصيل.

b- نقبل أن $A(x_0,y_0)$ حيث $x_0\approx-5{,}2$ و $y_0\approx2{,}9$ هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C) وأن f'(x) سالبة على المجال $[x_0,0[$ وموجبة على كل من المجالين $]-\infty,x_0]$ و $]0,+\infty[$. نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

أنشئ C .

تمرين 11:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}.\sqrt{1+x^2}$$

وليكن (ζ) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f، وتحقق من أن f فردية.

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$ وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما .

3- بين أنه لكل x من D لدينا : $f'(x)=\frac{3}{x^4.\sqrt{1+x^2}}$. واستنتج تغيرات f .

4- أنشئ (ζ).

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق على J . (g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g)

ج- أنشئ (ζ') المنحنى الممثل للدالة g^{-1} .

تمرين 12:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=6x^{\frac{2}{3}}-4x$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{f(x)}{x}$. أول هندسيا النتيجة .

2- حدد الفرع اللانهائي ل (ζ) منحنى f .

3- احسب f'(x) لكل x من $]0,+\infty[$ ثم حدد جدول تغيرات f .

4-أ- حدد نقطتي تقاطع (ζ) مع محور الأفاصيل.

ب- حدد معادلة (Δ) مماس (ζ) في النقطة ذات الأفصول $\frac{27}{8}$

ج- أنشئ (Δ) و (ζ) في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

(وحدة القياس : 1 cm).

5- g قصور f على المجال $I=[1,+\infty[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال يتم تحديده . احسب $(g^{-1})'(0)$.

تمرين13:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي:

$$f(x)=(\sqrt{1+x^2}-x)^2$$

(ζ) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2-أ- بين أن لكل x من IR : $f'(x)=\dfrac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

ب- أثبت أن $f'(x)\neq 0$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم استنتج الفرع اللانهائي ل (ζ) جوار $-\infty$

4-أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (ζ) في النقطة ذات الأفصول 0.

ب- أنشئ المستقيم (T) والمنحنى (ζ) (الوحدة 2cm)

5-أ- بين أن f تقابل من IR نحو مجال J يتم تحديده.

ب- احسب $(f^{-1})'(1)$

ج- احسب f'(x) لكل x من J .

تمرين14:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=x-2+\sqrt[3]{x^2+1}$$

وليكن (ζ) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (ζ)

2-أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$, $(\forall x\in[0,+\infty[)$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده

4-أ- بين أن المعادلة f(x) =0 تقبل حلا وحيدا α بحيث $\dfrac{1}{2}\prec\alpha\prec 1$ (دون حساب α).

ب- حدد نقطة تقاطع (ζ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته y =x .

ج- أنشئ (ζ) ثم (ζ') منحنى الدالة f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

تمرين15:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR^* بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -x + \dfrac{2}{x} & (x \in]-\infty, 0[\cup]0,1[) \\ f(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} & (x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

1- بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 1$

2-أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 1$ على اليسار .

ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 1$ على اليمين (لاحظ أن $(1 + x - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2$

3- أ- بين أن $f'(x) \prec 0$ $(\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0,1[)$

ب- بين أن $f'(x) = \dfrac{x-1}{4\sqrt{x}}$ $(\forall x \in]1, +\infty[)$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f.

4- ليكن (ζ) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (ζ).

ب- أنشئ المنحنى (ζ) (نقبل أن للمنحنى (ζ) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها 3)

تمرين16:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x}; & x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 3} & ; x \ge 1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ وبين أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 1 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3- أ- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[1, +\infty[$

بين أن $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$ لكل x من $]-\infty, 1[$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f .

4-أ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

ب- ارسم المنحنى (C) (لاحظ أن f(-3)=0)

5- لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1, +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[1, +\infty[$ نحو مجال I ينبغي تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال I .

ج- بين أن g^{-1} هي دالة أصلية للدالة $x \to \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}$ على المجال

تمرين17:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

2- بين أن : $f\,'(x)=\left(\dfrac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3-أ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة y=x .

ب- ارسم المنحنى (C) $\left(f(4)=\frac{5}{2}\right.$ و $\left.f(\frac{1}{4})=\frac{7}{4}\right)$

4- لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$

أ- بين أن g تقبل دالةعكسية g^{-1} وحدد مجموعة الدالة g^{-1}

ب- ارسم في نفس المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى الممثل للدالة g^{-1} .

5- نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} a_0=2 \\ a_{n+1}=f(a_n) \end{cases}$

تمرين18:

أ- بين أن : $a_n\succ1$ $(\forall n\in IN)$

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_{n\in IN}$ تناقصية.

ج- استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\in IN}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x-2\sqrt{x-1} & ;x\geq1 \\ f(x)=x+2\sqrt{x-x} & ;x\prec1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في م.م.م $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-أ- ادرس اتصال f في 1.

ب- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 1، ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3-أ- احسب f'(x) لكل x من $IR-\{1\}$

ب- اعط جدول تغيرات f .

4-أ- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C) .

ب- حدد تقاطع المنحنى (C) مع محور الأفاصيل.

ج- ارسم المنحنى (C)

5- لتكن g الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[2,+\infty[$ والتي تحقق $g(2)=\frac{2}{3}$

أ- اكتب g(x) بدلالة x

ب- اعط جدول تغيرات الدالة g .

تمرين 1:

1-أ-) $x \in Df \Leftrightarrow \left(x \neq 1 \ \text{و}\ (x+1)(x-1) \geq 0\right)$

$\Leftrightarrow \left[x \neq 1 \ \text{و}\ (x \geq 1 \ \text{أو}\ x \leq -1)\right]$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[$

إذن $D_f = \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[$

ب-) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

بما أن $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

و $f(-1) = 0$

2- أ-) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 0$

إذن f قابلة للاشتقاق عل اليسار في 1-.

و $f_g'(-1) = 0$

ب-) $x \in D_f - \{-1\}$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)\frac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$$

$$= \frac{(x-1)^2 \dfrac{x+1}{x-1} - (x+1)}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$$

إذن

لكل x من $D_f - \{-1\}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$

ج-) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0		‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0		‖ $+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

$f(2) = 3\sqrt{3}$

3-أ-)

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-(x+2)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{(x+1)^2\frac{x+1}{x-1}-(x+2)^2}{(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(x+2)}$$

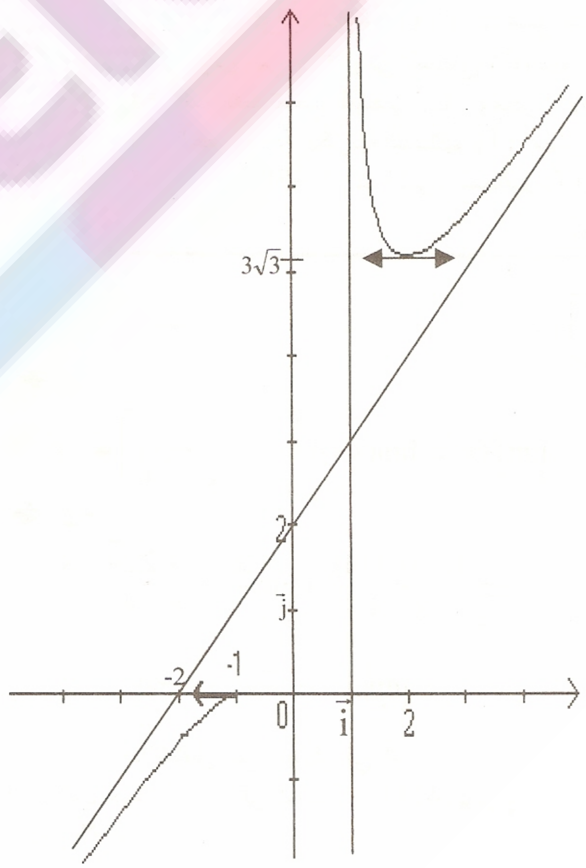
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x+5}{(x^2-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{(x-\frac{1}{x})\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(1+\frac{2}{x})(x-1)}=0$$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$

مقارب ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب) إنشاء (C)



تمرين 2:

-1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)\left[-1+\dfrac{2}{\sqrt{4-x}}\right]=-\infty$

-2

$$\lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}}\frac{x-4+2\sqrt{4-x}}{x-4}$$

$$=\lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{4-x}}\right)=-\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 4

يقبل (C) نصف مماس في النقطة A(4,0) يوازي محور الأراتيب.

-3أ-) لكل x من $]-\infty,4[$

$$f'(x)=1+2\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{4-x}}$$

ب-) إشارة f'(x) هي إشارة $\sqrt{4-x}-1$

$$\sqrt{4-x}-1=\frac{4-x-1}{\sqrt{4-x}+1}=\frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}$$

لدينا : $\forall x\prec4\ \ \sqrt{4-x}+1\succ0$

إذن إشارة f'(x) هي إشارة $3-x$

$$x\prec3\Leftrightarrow f'(x)\succ0$$

$$3\prec x\prec4\Leftrightarrow f'(x)\prec0$$

x	$-\infty$		3		4
f'(x)		+	0	−	‖
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

$$f(3)=-1+2=1$$

-4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2\sqrt{4-x}}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}-2\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-4+2\sqrt{4-x}\right)=+\infty$$

إذن يقبل (C) فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=x$

-5 $x\prec4$

$$f(x)=0\Leftrightarrow x-4+2\sqrt{4-x}=0$$

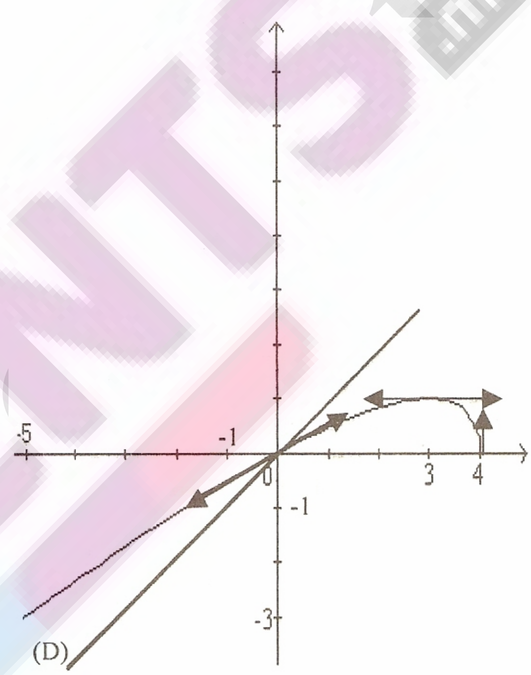
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = 4-x$$
$$\Leftrightarrow 4 = 4-x$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

إذن (C) يقطع محور الأفاصيل في أصل المعلم.

-6 $f(0)=0$ و $f'(0)=\frac{1}{2}$

$$(T): y = \frac{1}{2}x$$

-7 $f(-5) = -3$



تمرين 3:

1-) $x \in D_f \Leftrightarrow x^2+x \succ 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) \succ 0$

$x \in \Leftrightarrow x \ ]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

إذن $D_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

2-) نعلـــم أن

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} = \frac{1}{x^2+x}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

وبما أن $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2+x} = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = +\infty$

3-)
$$f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right] = f(-1-x)$$
$$= \frac{1}{(x+1)^2-1-x} - \sqrt{(x+1)^2-1-x}$$
$$= \frac{1}{x^2+2x-1-x} - \sqrt{x^2+2x+1-1-x} = f(x)$$

إذن $(\forall x \in D_f)\ f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right] = f(x)$

المستقيم (Δ) محور تماثل (C) .

4-) ليكن x من D_f

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$
$$= -(2x+1)\left[\frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\right]$$

5-) $(\forall x \in D_f\ ]0,+\infty[)\ \frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \succ 0$

إذن تقبل $f'(x)$ إشارة عكس إشارة $2x+1$ على $]0,+\infty[$

بما أن : $(\forall x \rangle 0)\quad 2x+1 \succ 0$

فإن : $\forall x \succ 0\ \ f'(x) \prec 0$

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	-	
f(x)	‖	$+\infty \searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+x}-\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=-\frac{1}{2}$

وبالتالي فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x-\frac{1}{2}$ مقارب ل (c) بجوار $+\infty$

7-) $f(x)=0$ $x\succ 0$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+x}=\sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow(x^2+x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$$

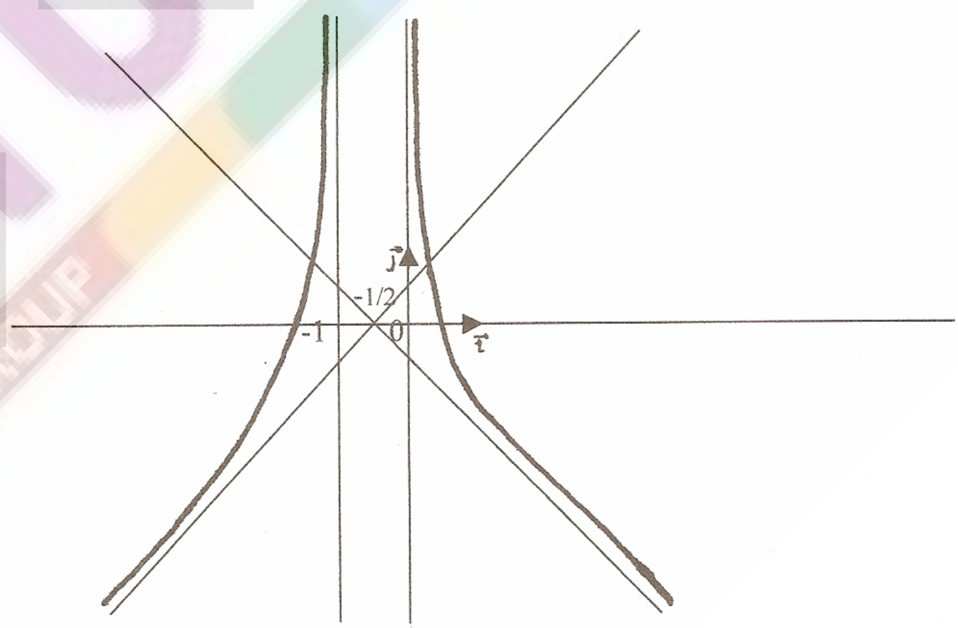
$$\Delta=1+4=5$$

إذن $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(الحل $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ غير مقبول لأنه سالب)

$$S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$\left(A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},0\right)$ هي نقطة تقاطع (C) ومحور الأفاصيل على $\mathbb{R}^{*+}$.



تمرين 4:

-1 $x \in D \Leftrightarrow 2x+1 \succ 0$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$$

$$D = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$$

لدينا $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^{+}} (x+1) = \frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^{+}} \sqrt{2x+1} = 0^{+}$

إذن $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^{+}} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

-2 $(D): y = -\frac{1}{2}$ مقارب ل (C)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2x+1}} = 0$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

3-أ) ليكن x من D .

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-(x+1)\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{(2x+1)}$$

$$= \frac{2x+1-x-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}} = x(2x+1)^{\frac{-3}{2}}$$

ب-)

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4-أ) ليكن x من D .

$$f''(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \times (2x+1)^{\frac{-5}{2}} \times 2$$

$$=(1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

$$(\forall x \succ -\frac{1}{2})\ f''(x)=(1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

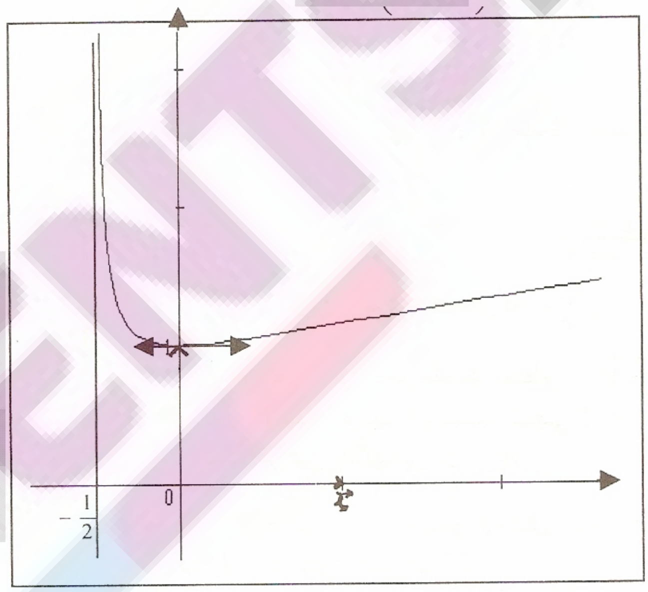
ب-) $x \succ -\frac{1}{2}$

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-x \succ 0$$
$$\Leftrightarrow x \prec 1$$

إذن f'' تنعدم وتغير الإشارة في $x_0=1$

$$f(1)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ومنه فإن $A\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ نقطة انعطاف ل (C).



6-أ-) g دالة متصلة وتناقصية قطعا على I .

و $J=g(I)=[1,+\infty[$

ومنه فإن g تقابل من I نحو J.

ب-) ليكن x من I و y من J .

$$y=g(x)\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}=y$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{x^2+2x+1}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x(1-y^2)+1-y^2=0$$

$$\Delta'=y^2(y^2-1)\geq 0$$

إذن $x_1=y^2-1-y\sqrt{y^2-1}$ و $x_2=y^2-1+y\sqrt{y^2-1}$

الحل $x_1=y^2-1-y\sqrt{y^2-1}$ غير مقبول لأنه سالب .

إذن $x=x_2=y^2-1+y\sqrt{y^2-1}$

ومنه فإن : $g^{-1}(x)=x^2-1+x\sqrt{x^2-1}$

تمرين 5:

I -1- $\forall x \succ 0 \quad h'(x) = 3(1-2\sqrt{x})$

$h'(x) \succ 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x} \succ 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \prec \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \prec x \prec \frac{1}{4}$

x	0		1/4		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	
h(x)		↗	0	↘	

-2 $h\left(\frac{1}{4}\right)$ قيمة قصوية للدالة h .

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \le h\left(\frac{1}{4}\right)$

أي أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \le 0$

II -1

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4x-1}{\sqrt{x}} - 4x\right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

يقبل (C) نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفصول 0

-2-أ) لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$

$$f'(x) = 4\sqrt{x} + (4x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x$$

$$= \frac{8x - 4x - 1 - 16x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{12x - 16x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4\left(3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{x}}$$

وباتالي فإن لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$: $f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

ب-)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

x	0		+∞
f'(x)	‖	-	
fx)	1/2	↘	+∞

ج-) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-4+\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$

يقبل (C)فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

3-أ-) g دالة متصلة وتناقصية قطعا على I .

إذن g تقابل من I نحو J .

$$J=g(1)\left]\lim_{x\to+\infty}g(x),g\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

ومنه $J=\left]-\infty,\frac{1}{4}\right]$

ب-) لدينا g تقابل من I نحو J و $0\in J$

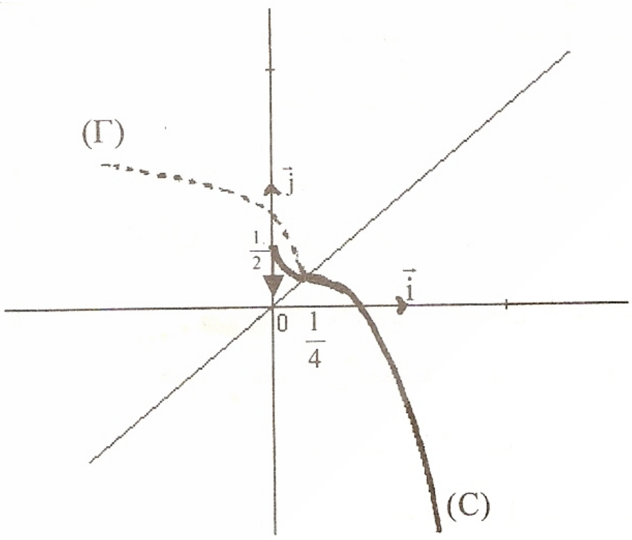
إذن 0 يقبل سابق وحيد في I .

يعني أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا $g(\frac{1}{2})=\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\succ 0$ و $g(\frac{3}{4})=\sqrt{3}-\frac{7}{4}\prec 0$

إذن $\alpha\in\left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[$

-4



تمرين 6:

1- لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

يعني أن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

وبما أن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

فإن $\lim(x-\sqrt{x^2-1}=-\infty$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

2-أ-)

$$\lim\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\lim x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right)=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\left(1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to1}(x+1)=2$ و $\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\sqrt{x^2-1}=0^+$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأراتيب الموجبة عند النقطة $A(1,1)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\sqrt{x^2-1}=0^+$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو محور الأراتيب الموجبة عند النقطة $B(-1,-1)$

ب-) $x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\forall x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[)\quad f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

ج-) لدينا : $(\forall x\in]+1,+\infty[)\sqrt{x^2-1}+x\succ 0$

وبالتالي فإن $(\forall x\in]1,+\infty[)f'(x)\succ 0$

إذن f دالة تزايدية على $]1,+\infty[$

$(\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$

$$f'(x)=\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)}$$

$$(\forall x\in]-\infty,-1[)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\succ 0$$

إذن $(\forall x\in]-\infty,-1[)\ f'(x)\prec 0$

وبالتالي فإن f تناقصية على $]-\infty,-1[$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
f'(x)		$-$	‖	‖	$+$	
f(x)	0	↘	1	1	↗	$+\infty$

3-أ-) $x\in]1,+\infty[$

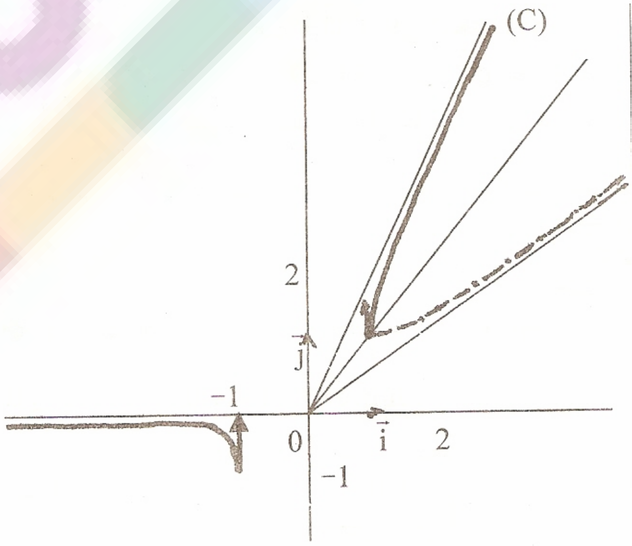
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=+\infty$

إذن المنحنى(C) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y=2x$

ب-)



1- g دالة متصلة وتزايدية قطعا على I .

و $g(I)=I$

إذن g تقابل من I نحو I.

ومنه فإن g تقبل دالة عكسية

g^{-1} معرفة على I .

تمرين 7:

1-أ-) $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

ب-) إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $-x \in \mathbb{R}^*$

و $f(-x) = -2x - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{-x}$

$= -2x + \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -f(x)$

إذن $\forall \in \mathbb{R}^*\ f(-x) = -f(x)$

إذن f دالة فردية.

-2 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2x - \sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right) = +\infty$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1-3 -) $x \in I$

$$f(x) - (2x-1) = 2x - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} - 2x + 1$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \frac{x - \sqrt{x^2+3}}{x}$$

ب-)

$$f(x) - (2x-1) = \frac{x^2 - (x^2+3)}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} = \frac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) = +\infty$

فإن $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} = 0$

إذن $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-1)] = 0$

وبالتالي فإن (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج-) لدينا $\dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} \ (\forall x \in I)$

أي أن $f(x) \prec 2x-1 \qquad (\forall x \in I)$

إذن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]0,+\infty[$

4-أ-)
$$x \neq 0;\ f'(x) = 2 - \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} - \sqrt{x^2+3}}{x^2}$$
$$= 2 - \frac{x^2-(x^2+3)}{x^2\sqrt{x^2+3}}$$
$$= 2 + \frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$$

$$(\forall x \in I)\ f'(x) = 2 + \frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$$

ب-)

x	0	$+\infty$
f'(x)	||	+
f(x)	|| $-\infty$	↗ $+\infty$

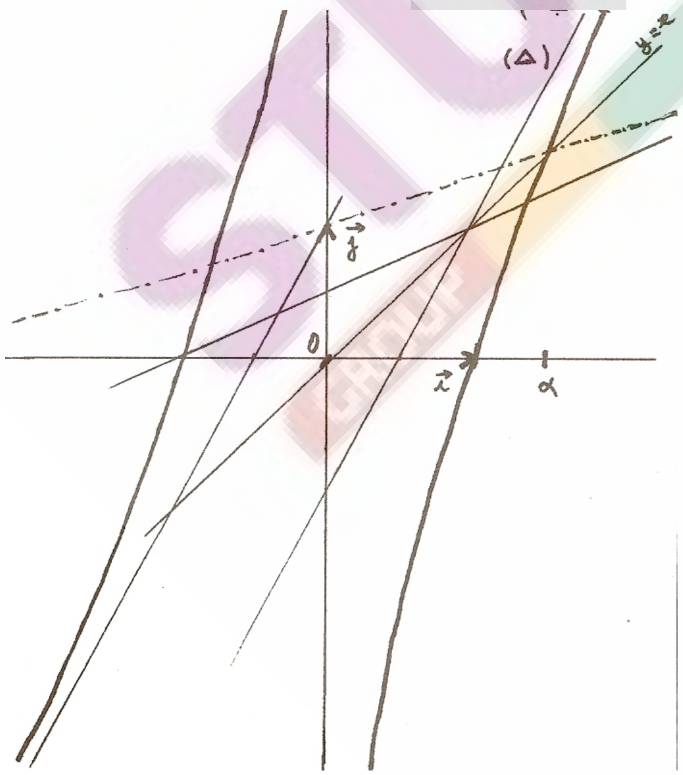
5-أ-) تقاطع (C) مع محور الأفاصيل على I .
$$\begin{cases} x \in I \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ x^2 - \sqrt{x^2+3} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{x^2+3} \\ x \in I \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - x^2 - 3 = 0 \\ x \in I \end{cases}$$

المعادلة $4x^4 - x^2 - 3 = 0$ يؤول حلها إلى معادلة من الدرجة الثانية .
$$4x^4 - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 1 \text{ أو } x^2 = -\frac{3}{4})$$
$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ أو } x = -1)$$
$$\left.\begin{matrix} f(x) = 0 \\ x \in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = 1$$

إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في النقطة $A(1,0)$ على المجال I

معادلة (T) مماس (C) عند النقطة A هي:
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$T : y = 3x - 3$$

ب-



لدينا f دالة فردية

إذن منحناها (C) متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم.

-6

g دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال I .

و $g(I) = \mathbb{R}$

إذن g تقابل من I نحو $\mathbb{R}$

تمرين 8:

1-أ-)

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x+2)(x-3)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب-) $\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2\sqrt{(x+2)(x+3)}}{x+2}$

$$=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2(x+2)(x+3)}{(x+2)\sqrt{(x+2)(x+3)}}=\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{2(x+3)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$$

بما أن $\lim_{x\to-2}2(3-x)=10$

$\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\sqrt{(x+2)(x+3)}=0^+$

فإن $\lim_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\frac{f(x)}{x+2}=+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x-3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\frac{f(x)}{x-3}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}{x-3}$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{-2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\frac{f(x)}{x-3}=-\infty$$

2-أ-)

$$\begin{cases}f(x)=2\sqrt{(x+2)(3-x)};-2\prec x\prec3\\ f(x)=2\sqrt{(x+2)(x-3)};x\succ3\end{cases}$$

إذا كان $x\in]-2,3[$

فإن $f'(x)=\frac{2[(x+2)(3-x)]'}{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

أي أن $(\forall x\in]-2,3[)\ \ f'(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ على $]-2,3[$ هي إشارة $1-2x$ (لأن $\sqrt{(x-2)(3-x)}\succ0$)

إذا كان $x\in]3,+\infty[$

فإن $f'(x) = 2\dfrac{\left[(x+2)(x-3)\right]'}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}$

$$(\forall x \in]3,+\infty[)\quad f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{(x+2)(x-3)}}$$

$$x \succ 3 \Rightarrow x \succ \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1 \succ 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \succ 0$$

إذن $\forall x \in]3,+\infty[\ f'(x) \succ 0$

ب-

x	-2		$1/2$		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3-أ)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-x-6}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x^2 1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}} = 2$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{(x+2)(x-3)}-2x\right]$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)(x-3)-x^2}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{6-x}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{6}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x}} + 1} = -1$$

إذن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب-) ليكن x عنصرا من $]3, +\infty[$

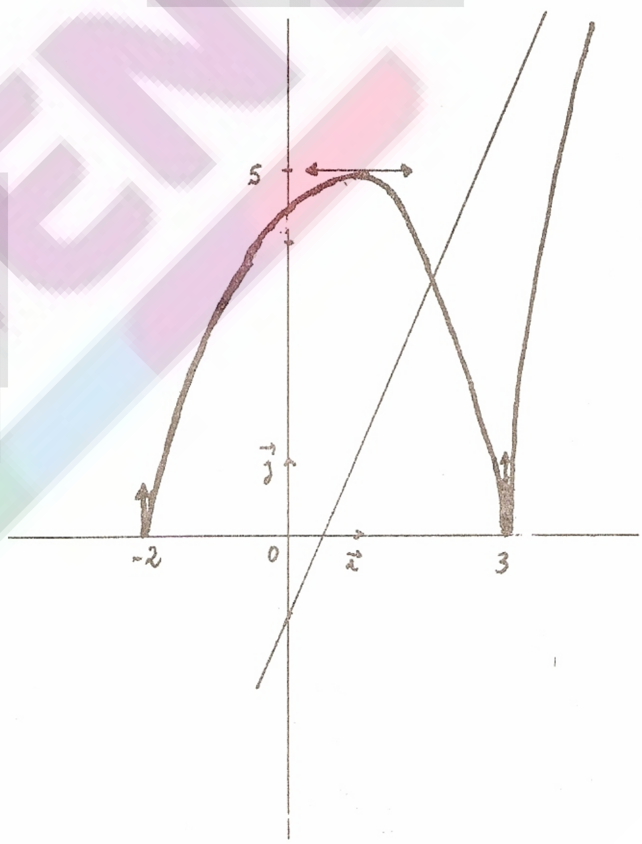
$$f(x) - (2x-1) = 2\sqrt{(x+2)(x-3)} - (2x-1)$$

$$= \frac{4(x+2)(x-3) - (2x-1)^2}{2\sqrt{(x+2)(x-3)} + (2x-1)}$$

$$= \frac{-25}{2\sqrt{(x+2)(x-3)} + (2x-1)} \prec 0$$

لكل x من $]3, +\infty[$; $f(x) \prec 2x - 1$

إذن المستقيم (D) يوجد تحت المنحنى (C) على المجال $]3, +\infty[$.



تمرين 9:

-1

$$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+2x\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+2)\geq 0$$
$$x\in]-\infty,2]\cup[0,+\infty[$$
$$D_f=]-\infty,2]\cup[0,+\infty[$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

-2 $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+2x})=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$

إذن $\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)=-2$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$

ومنه فإن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y=-1$

-3

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{x+\sqrt{x^2+2x}+2}{x+2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}\right)=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(1+\frac{x^2+2x}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\right)=-\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 2-.

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1+\frac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}\right)$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

4-أ-) ليكن x من $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

إذن $f'(x)=1+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

$(\forall x\in D-\{-2,0\})$

$$x>0 \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x+1+\sqrt{x^2+2x}>0$$

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\quad f'(x)>0$$

إذن f تزايدية على المجال $]0,+\infty[$

ليكن x من D .

$$x+1+\sqrt{x^2+2x} = \frac{(x+1)^2-(x^2+2x)}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$x<-2 \Rightarrow \begin{cases} x+1<-1<0 \\ -\sqrt{x^2+2x}<0 \end{cases}$$

إذن $\forall x\in\,]-\infty,-2[\quad f'(x)<0$

وبالتالي فإن الدالة f تناقصية على $]-\infty,-2[$

x	$-\infty$		**-2**		**0**		$+\infty$
f'(x)		-	||		||	+	
f(x)	**-1**	↘	**-2**		**0**	↗	$+\infty$

5-أ-)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2+2x}-2x-1\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$$

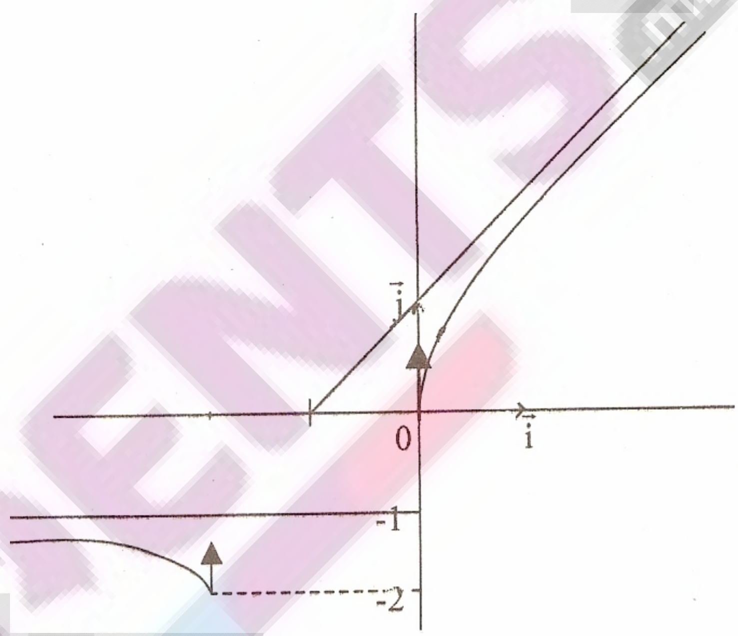
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty$

وبالتالي فإن $\lim \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} = 0$

يعني أن $\lim_{x \to +\infty} [f(x)-(2x+1)] = 0$

وبالتالي فإن المستقيم الذي معادلته $y = 2x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$



6-أ-) g دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ و $g([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

إذن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ليكن y من $\mathbb{R}^+$.

نقوم بحل المعادلة $y = g(x)$ $x \geq 0$

$$\begin{pmatrix} y = g(x) \\ x \geq 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \sqrt{x^2+2x} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[y - x = \sqrt{x^2+2}, x \geq 0 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[(y-x)^2 = x^2+2x, x \geq 0 \right]$$

$$\left[\Leftrightarrow (y^2-2xy+x^2 = x^2+2x, x \geq 0) \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[(2y+2)x - y^2 = 0, x \geq 0 \right]$$

بما أن $y \geq 0$ فإن $2y+2 \neq 0$

وبالتالي فإن $x = \frac{y^2}{2y+2}$

$$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{2x+2}$$

تمرين 10:

1-a – تحديد D .

بما أن : $D=\{x\in IR / 2x\neq 0$ و $27+x^2\geq 0\}$

وبما أن : $27+x^2\geq 0$ لكل x من IR

فإن : $D=\{x\in IR / 2x\neq 0\}$

$=\{x\in IR / x\neq 0\}$

إذن : $D=IR^*$

$=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

b- حساب نهايات f عند محدات D

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{27+x^2}=+\infty$

و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x+1}{2x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

إذن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=+\infty$

- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{27+x^2}=\sqrt{27}$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{2x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1}{2x}=-\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

2-a التحقق من صحة المتساوية

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}-\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}-x)=\frac{x+1}{2x}\frac{(\sqrt{27+x^2}-x)(\sqrt{27+x^2}+x)}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

$$=\frac{x+1}{2x}.\frac{27+x^2-x^2}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

إذن : $f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

b- الاستنتاج

بما أن : $f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(\frac{x+1}{2x}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_1) ذا المعادلة $y=\frac{x+1}{2}$

هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

c- لنبين أن (Δ_2) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}+x)=\frac{(x+1)(27+x^2-x^2)}{2x(\sqrt{27+x^2}-x)}$$

$$=\frac{x+1}{2x}.\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}$$

وبما أن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

فإن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_2) ذا المعادلة $y=-\frac{x+1}{2}$ هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

3- a- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* ولدينا لكل x من IR^*

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}}{4x^2}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2x}.\frac{2x}{2\sqrt{27+x^2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{27+x^2}}{2x^2}+\frac{x+1}{2\sqrt{27+x^2}}=\frac{x^2(x+1)-(27+x^2)}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

$$=\frac{x^3+x^2-27-x^2}{2x^2-\sqrt{x^2+27}}=\frac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

b- تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^3-27

ولدينا لكل x من IR^* : $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-27=0$

$$\Leftrightarrow x^3=27$$
$$\Leftrightarrow x=3$$

و $f'(x)\succ 0\Leftrightarrow x^3-27\succ 0$

$$x^3\succ 27$$
$$x\succ 3$$

و $f'(x)\prec 0\Leftrightarrow x\prec 3$

إذن الدالة f تزايدية على المجال $[3,+\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,3]$

c- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f '(x)		$-$	||	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

4-a- تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

ليكن x عددا حقيقيا

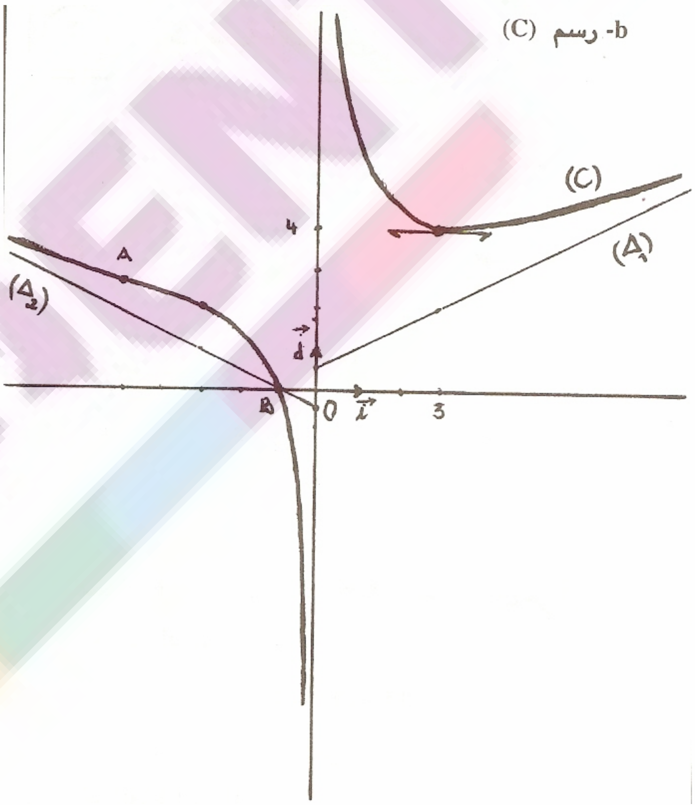
بما أن : $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\sqrt{27+x^2}}{2x}=0$

$$\Leftrightarrow x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

فإن محور الأفاصيل يقطع (C) في النقطة $B(-1,0)$

b- رسم (C)



تمرين 11:

-1 * تحديد D

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا $1+x^2 \geq 0$ و $x \in D \Leftrightarrow x^3 \neq 0$

$1+x^2 \geq 0$ و $x \neq 0$

وبما أن : $1+x^2 \geq 0$ لكل x من IR

$$D = IR^*$$
$$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

- **التحقق من أن f فردية**

ليكن x عنصرا من IR^*

لدينا : $(-x) \in IR^*$ و $f(-x) = \dfrac{2(-x^2)-1}{(-x)^3} . \sqrt{1+(-x)^2}$

$$= \frac{2x^2-1}{-x^3}\sqrt{1+x^2} = -f(x)$$

إذن الدالة f هي بالفعل فردية.

-2 حساب النهايتين والتأويل الهندسي

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3} . \sqrt{1+x^2}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3} . \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3} . |x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3} . x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2} . \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

وبما أن : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

و $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{1+0} = 1$

فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.1 = 2$

و هذا يعني هندسيا أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ هو مقارب أفقي للمنحنى (ζ) بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{2x^2-1}{x^3} = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{1+x^2} = 1$

إذن : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

و هذا يعني هندسيا أن المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ أي محور الأراتيب هو مقارب رأسي للمنحنى (ζ).

-3 تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ولدينا لكل x من D :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)' \sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2-1}{x^3}(\sqrt{1+x^2})'$$

$$=\frac{4x.x^{3}-3x^{2}(2x^{2}-1)}{x^{6}}\sqrt{1+x^{2}}+\frac{2x^{2}-1}{x^{3}}.\frac{2x}{2\sqrt{1+x^{2}}}$$

$$=\frac{4x^{2}-6x^{2}+3}{x^{4}}\sqrt{1+x^{2}}+\frac{2x^{2}-1}{x^{2}}.\frac{2x}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

$$=\frac{3-2x^{2}}{x^{4}}\sqrt{1+x^{2}}+\frac{2x^{2}-1}{x^{2}\sqrt{1+x^{2}}}=\frac{(3-2x^{2})(1+x^{2})+x^{2}(2x^{2}-1)}{x^{4}\sqrt{1+x^{2}}}$$

$$=\frac{3+3x^{2}-2x^{2}-2x^{4}+2x^{4}-x^{2}}{x^{4}\sqrt{1+x^{2}}}=\frac{3}{x^{4}\sqrt{1+x^{2}}}$$

إذن $f\,'(x)\succ 0$ لكل x من IR^{*}

وهذا يعني أن f تزايدية قطعا على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f ' (x)		+	‖	+	
f(x)	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

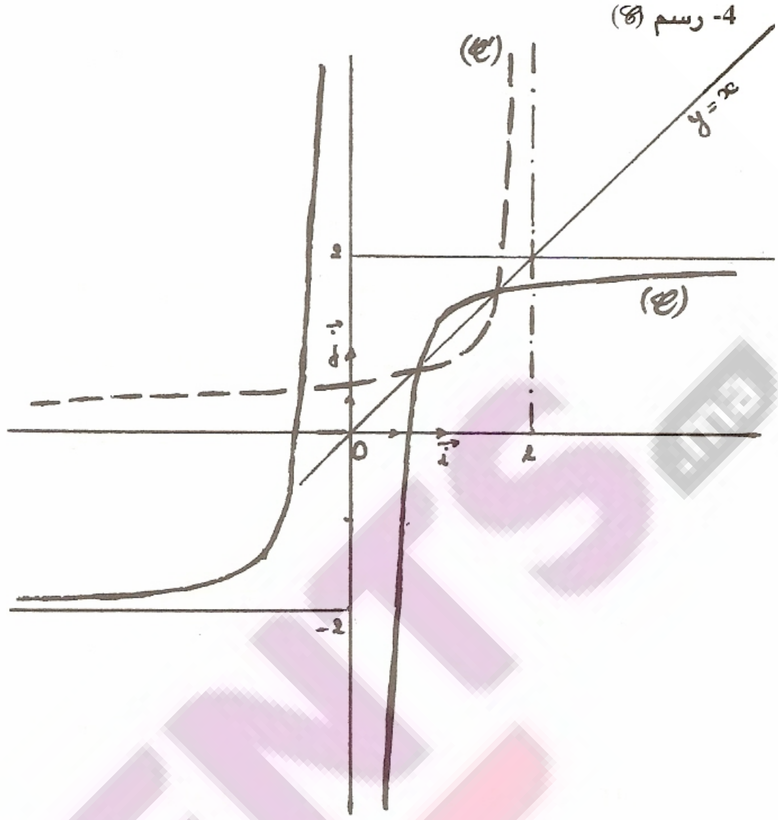
لاحظ أن :

لدينا : $\lim_{x\to 0^{-}} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-2$

لأن : $\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$

و f فردية.

4- رسم $(\mathscr{C})$



4- أ- لنبين أن g تقابل من IR^{+*} نحو مجال J

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فإنها تقابل من $]0,+\infty[$ نحو المجال : $J=g(]0,+\infty[)=]-\infty,2[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $]-\infty,2[$ نحو $]0,+\infty[$

ب- لنبين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال J.

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]0,+\infty[$

$g'(x)\neq 0$

إذن الدالة g^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال J .

ج- رسم (ζ')

مماثل منحنى f على $]0,+\infty[$ هو المنحنى (ζ') بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل)

تمرين 12:

1-* حساب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{x}-4$$

$$=\frac{6x^{\frac{2}{3}-1}}{x}-4=6x^{\frac{-1}{3}}-4=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-4$$

وبما أن : $\lim_{x\to0^+}=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$

فإن : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ملحوظة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

- **التأويل الهندسي**

المنحنى (ζ) يقبل في النقطة O(0,0) نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى.

2- تحديد الفرع اللانهائي

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-4$

$= 0\text{-}4 = \text{-}4$

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)+4x=\lim_{x\to+\infty}6x^{\frac{2}{3}}$

$=\lim_{x\to+\infty}6\sqrt[3]{x^2}=+\infty$

فإن المنحنى (ζ) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=-4x$

3- جدول تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*}

$$f'(x)=6.\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}-4$$

$$=4\left(x^{-\frac{1}{3}}-1\right)=4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)$$

$$=4\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-\sqrt[3]{x}$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	
f(x)	0	↗	2	↘	$-\infty$

ملاحظة : لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(6x^{\frac{2}{3}} - 4\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(6x^{\frac{2}{3}-1} - 4\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(6x^{\frac{-1}{3}} - 4\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 4\right) = -\infty$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 4 = 0 - 4 = -4$ و $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$)

4-أ- تحديد نقطتي تقاطع (ζ) مع محور الأفاصيل.

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^{\frac{2}{3}} - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}}\left(3 - \frac{2x}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}}\left(3 - 2x^{1-\frac{2}{3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}}\left(3 - 2x^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = \frac{27}{8}$$

إذن محور الأفاصيل يقطع (ζ) في النقطتين O(0,0) و $A(\frac{27}{8},0)$

ب- معادلة (Δ)

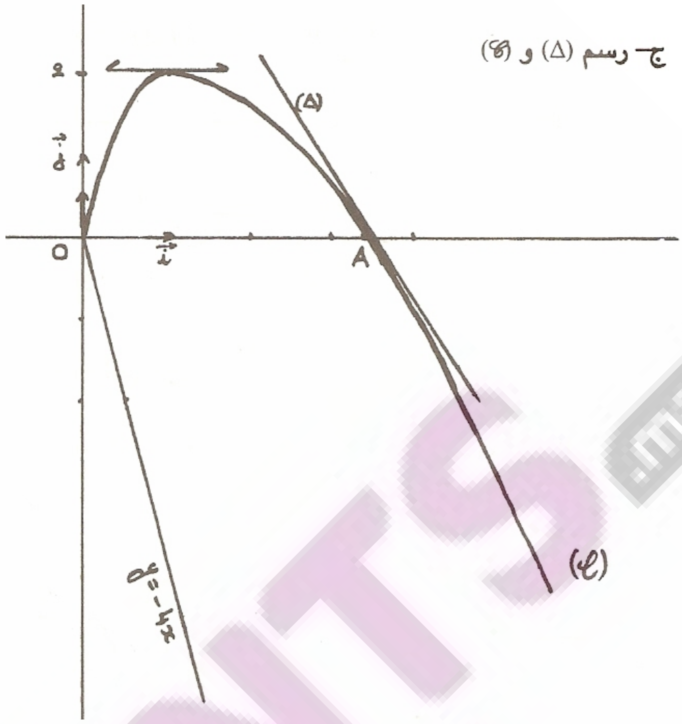
معادلة (Δ) مماس (ζ) في النقطة ذات الأفصول $\frac{27}{8}$ هي:

$$y = f'\left(\frac{27}{8}\right)\times\left(x - \frac{27}{8}\right) + f\left(\frac{27}{8}\right)$$

يعني أن : $y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{27}{8}\right) + 0$

أي أن : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{9}{2}$

ج- رسم (Δ) و (𝒞)



5-* لنبين أن g تقابل

الدالة g متصلة وتناقصية قطعا على المجال $I=[1,+\infty[$

وبالتالي فإنها تقابل من I نحو المجال $g(I)=]-\infty,2]$

أي أنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $]-\infty,2]$ نحو $[1,+\infty[$

- حساب $(g^{-1})'(0)$

بما أن : $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g(g^{-1}(0))}$

وبما أن : $g(\frac{27}{8})=0$ فإن $(g^{-1})(0)=\frac{27}{8}$

فإن : $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'\left(\frac{27}{8}\right)}$

$$=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$$

تمرين 13:

1-أ- حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

بما أن : $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$

فإن : $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} - x = +\infty$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

ب- لنبين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^2 = 0$

2- أ- لنبين أن : $f'(x) = \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل x من IR :

$$f'(x) = 2(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}-x)'$$

$$= 2(\sqrt{1+x^2}-x)\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1\right)$$

$$= 2(\sqrt{1+x^2}-x)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) = 2(\sqrt{1+x^2}-x)\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{-2(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-2(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

ب-* لنبين أن $f'(x) \neq 0$ لكل x من IR

لذلك سنبين أن المعادلة $f'(x) = 0$ لا تقبل أي حل في IR.

لدينا : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x^2}-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}-x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

وهذا غير ممكن

إذن المعادلة $f'(x) = 0$ لا تقبل أي حل في IR

وهذا يعني أن $f'(x) \neq 0$ لكل x من IR.

طريقة ثانية:

ليكن x عنصرا حقيقيا

بما أن : $x^2+1 \succ x^2$

فإن : $\sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$

يعني أن : $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$

وبما أن : $|x| \geq x$

فإن : $\sqrt{x^2+1} \succ x$

يعني أن : $\sqrt{x^2+1}-x \succ 0$

إذن : $f(x) \succ 0$

ومنه $f(x) \neq 0$

وبالتالي: $f'(x) \neq 0$ لكل x من IR.

- **جدول تغيرات الدالة f**

بما أن : $f'(x) = \dfrac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ لكل x من IR.

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-f(x)$

وبما أن $f(x) \succ 0$ لكل x من IR.

فإن $f'(x) \prec 0$ لكل x من IR.

ومنه جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

3-* لنبين أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

لكل x من IR^* ، $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{x}$

$$= \frac{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2}{x} = \frac{1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$= \frac{1}{x} + 2x - 2\sqrt{1+x^2}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 2\sqrt{1+x^2} = -\infty$

فإن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

- **التأويل الهندسي**

المنحنى (ζ) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

4-أ- معادلة للماس (T)

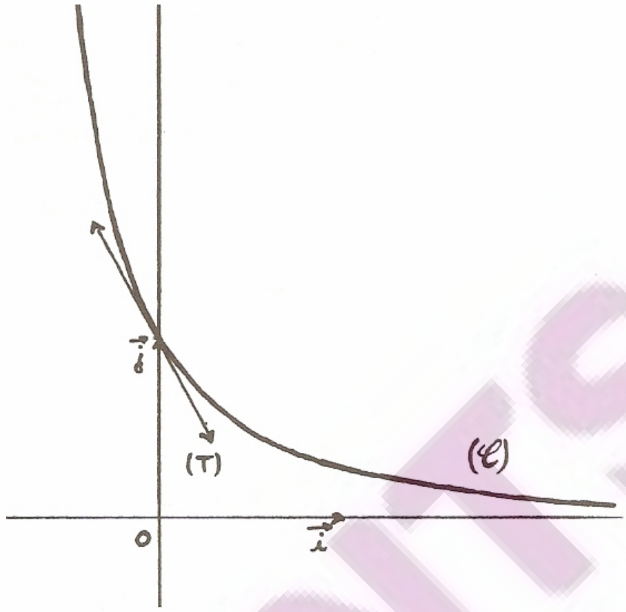
معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس (ζ) في النقطة ذات الأفصول 0 هي:

$$y = f\,'(0)(x-0)+f\,(0)$$

أي : $y = -2(x-0)+1$

أي : $y = -2x+1$

ب- رسم (T) و (ζ)



5-أ- لنبين أن f تقابل من IR نحو مجال J .

الدالة f متصلة وتناقصية قطعا على IR

إذن فهي تقابل من IR نحو المجال $J = f\,(IR) =]0,+\infty[$

وبالتالي فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على من $]0,+\infty[$ نحو IR

ب- حساب $(f^{-1})'(1)$

بما أن : $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f\,'(f^{-1}(1))}$

وبما أن : $(f)(0) = 1$ فإن $f^{-1}(1) = 0$

فإن : $(f^{-1})(1) = \dfrac{1}{f\,'(0)}$

$$= \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

ج- حساب $f\,'(x)$

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$ و y عنصرا من IR

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+y^2}-y)^2 = x$$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2}-y = -\sqrt{x}$ أو $\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2}-y = \sqrt{x}$

لدينا : $\sqrt{1+y^2}-y \succ 0$ (لأن $\sqrt{1+y^2} \succ y$)

أي : $\sqrt{1+y^2}-y = \sqrt{x}$

أي : $\sqrt{1+y^2} = \sqrt{x}+y$ أي : $(\sqrt{1+y^2})^2 = (\sqrt{x}+y)^2$

أي : $1+y^2 = 2y\sqrt{x}+y^2$

أي : $2y\sqrt{x} = 1-x$ أي : $y = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}$

إذن : $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}$ لكل x من IR

تمرين 14:

1-أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} = \sqrt[3]{x^2+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب- دراسة الفرع اللانهائي

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = 1-0+0=1$$
و
$$= \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} -2+\sqrt[3]{x^2+1}$$
$$=+\infty$$

إذن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم ذو المعادلة y =x

2-أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^+

لدينا لكل x من IR^+
$$f'(x) = \left[x-2+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right]'$$
$$=1+\frac{1}{3}2x(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} = 1+\frac{2x}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}$$

إذن :
$$= \frac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

ب- جدول تغيرات f

بما أن $f'(x) \succ 0$ لكل x من IR^+

فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي :

x	0		$+\infty$
f '(x)	1	+	
f(x)	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1- لنبين أن f تقابل من IR^+ نحو مجال I.

بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على IR^+ ،

فإنها تقابل من IR^+ نحو المجال : $I = f(IR^+) = [-1,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $[-1,+\infty[$ نحو IR^+

4-أ- لنبين أن المعادلة f(x) =0 تقبل حلا وحيدا.

بما أن : $f(1) = -1 + \sqrt[3]{2} \succ 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \prec 0$

إذن : $f(1).f(\frac{1}{2}) \prec 0$

وبما أن f متصلة وتزايدية قطعا على $\left[\frac{1}{2},1\right]$

فإن المعادلة f(x)=0 تقبل بالفعل حلا وحيدا α بحيث $\frac{1}{2} \prec \alpha \prec 1$

ب- تحديد نقطة تقاطع (ζ) و (Δ)

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow -2 + \sqrt[3]{x^2+1} = 0$

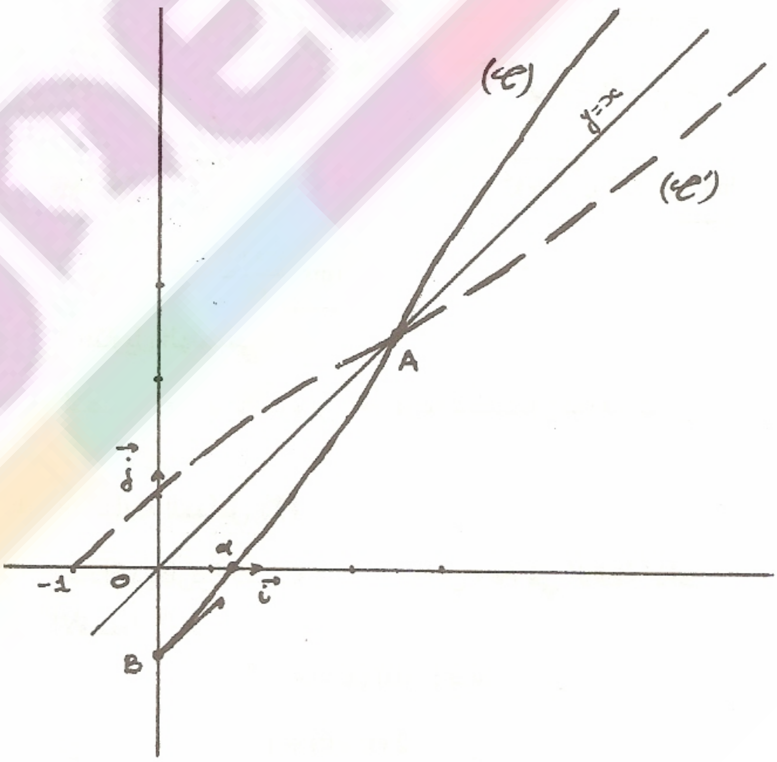
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+1} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 7$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ (لأن $x \geq 0$)

إذن نقطة تقاطع (ζ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته y =x هي : $A\left(\sqrt{7},\sqrt{7}\right)$

ج- رسم (ζ) و (ζ')



ملحوظة : معادلة ديكارتية لحامل نصف مماس (ζ) عند النقطة $B(0,-1)$ هي $y = x - 1$

تمرين 15:

1- لنبين أن f متصلة في 1.

بما أن : $f(1)=\dfrac{1+1}{2\sqrt{1}}$

$=\dfrac{2}{2}=1$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{1+1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{2}{2}=1=f(1)$

فإن الدالة f متصلة على اليمين في I .

ولدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x+\dfrac{2}{x}\right)$

$=-1+\dfrac{2}{1}=-1+2=1=f(1)$

إذن الدالة f متصلة على اليسار في 1

وبالتالي فإن الدالة f متصلة بالفعل في النقطة $x_0=1$ لأنها متصلة على اليمين وعلى اليسار في هذه النقطة

2-أ- لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

لدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x+\dfrac{2}{x}-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^2+2-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(-x-2)}{x(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x-2}{x}=\dfrac{-1-2}{1}=-3$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق بالفعل على اليسار في 1

و : $f_g'(1)=-3$

ب- لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

لدينا: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{1-1}{2(1+1)}=\dfrac{0}{4}=0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق بالفعل على اليمين في 1

و : $f_{d'}(1)=0$

3-أ- لنبين أن $f'(x)\prec 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[\cup]0,1[$ ولدينا x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

$f'(x)=\left(-x+\dfrac{2}{x}\right)$

$=-1-\dfrac{2}{x^2}-\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$

وبما أن : $1+\frac{2}{x^2} \succ 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

فإن : $f'(x) \prec 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

أ- لنبين أن : $f'(x)=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$ لكل x من $]1,+\infty[$

f دالة قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)}{x}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1-x}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$$

إذن $f'(x) \succ 0$ لكل x من $]1,+\infty[$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		−	‖	− (-3)	‖ (0)	+	
f(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

لدينا :

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$

4-أ- دراسة الفروع اللانهائية:

*بما أن : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

فإن المنحنى (ζ) يقبل مقاربا رأسيا معادلته x =0 أي محور الأراتيب.

* لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$ ، $f(x)=-x+\frac{2}{x}$

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$

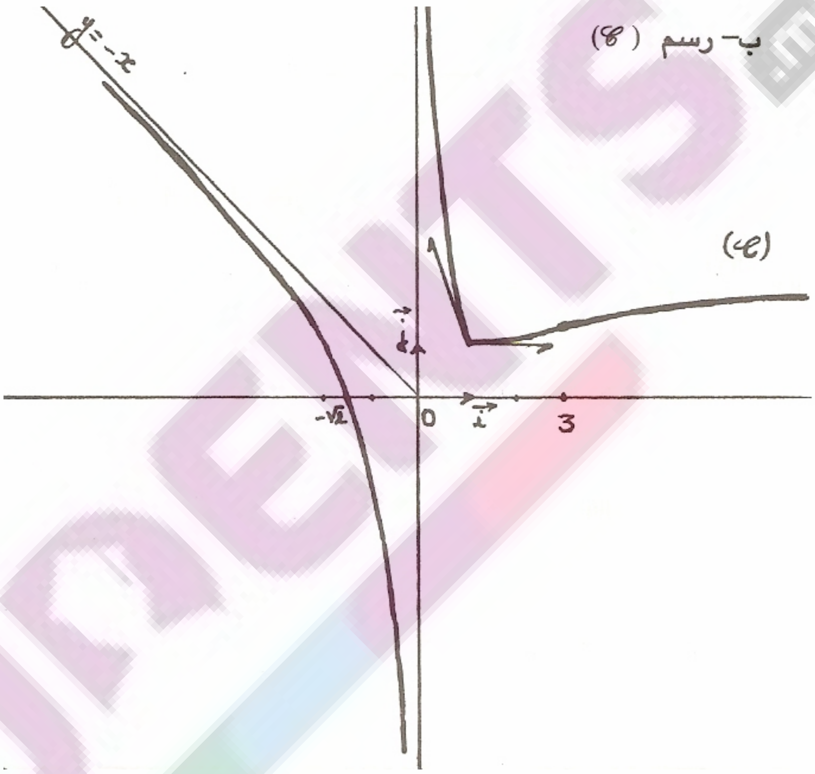
إذن (ζ) مقاربا معادلته y = -x يقبل بجوار $-\infty$

* لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x}{2x\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 + 0 = 0$

إذن (ζ) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

ب- رسم $(\mathscr{C})$



ملحوظة : معادلتا حاملي نصفي مماس (ζ) عند النقطة ذات الأفصول 1 هما : $y = 1$ و $y = -3x + 4$

تمرين 16:

1- * حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^3+1}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$

* لنبين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لكل x من $]-\infty,1[$. $f(x)=x-1+2\sqrt{1-x}$

$=\sqrt{1-x}(2-\sqrt{1-x})$

ولدينا : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} 2-\sqrt{1-x}=-\infty$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2- * دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 1

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x^3-1}{x^3+1}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{(x-1)(x^3+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+1)})$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x+1}{x^3+1}=\frac{3}{2}$$

وبالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 ولدينا : $f_d'(1)=\frac{3}{2}$

*** دراسة قابلية اشتقاق f على اليسار في 1**

بما أن :
$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x-1}+\frac{2\sqrt{1-x}}{-(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{(1-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

*** التأويل الهندسي :**

(ζ) يقبل في النقطة $A(1,0)$ نصفي مماس أحدهما رأسي موجه نحو الأعلى والآخر على اليمين معادلة حامله هي

$$y=\frac{3}{2}(x-1)$$

3-1- لنبين أن f تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$

f دالة قابلة للاشتقاق على $[1,+\infty[$

لكل x من $]1,+\infty[$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)'$$

$$=\frac{3x^2(x^3+1)-3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2}=\frac{3x^2(x^3+1-x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$=\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

وبالتالي فإن $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]1,+\infty[$

إذن f هي بالفعل دالة تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

ب- لنبين أن $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$ **لكل x من** $]-\infty,1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,1[$

ولدينا لكل x من $]-\infty,1[$

$$f'(x)=(x-1+2\sqrt{1-x})'$$

$$=1+2.\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$=\frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}=\frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

ج- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	$(-\infty)\Vert\left(\frac{3}{2}\right)$	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1

4- أ- دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

إذن (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته y = 1 بجوار $+\infty$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}+\frac{2\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}+\frac{2(1-x)}{x\sqrt{1-x}}$$

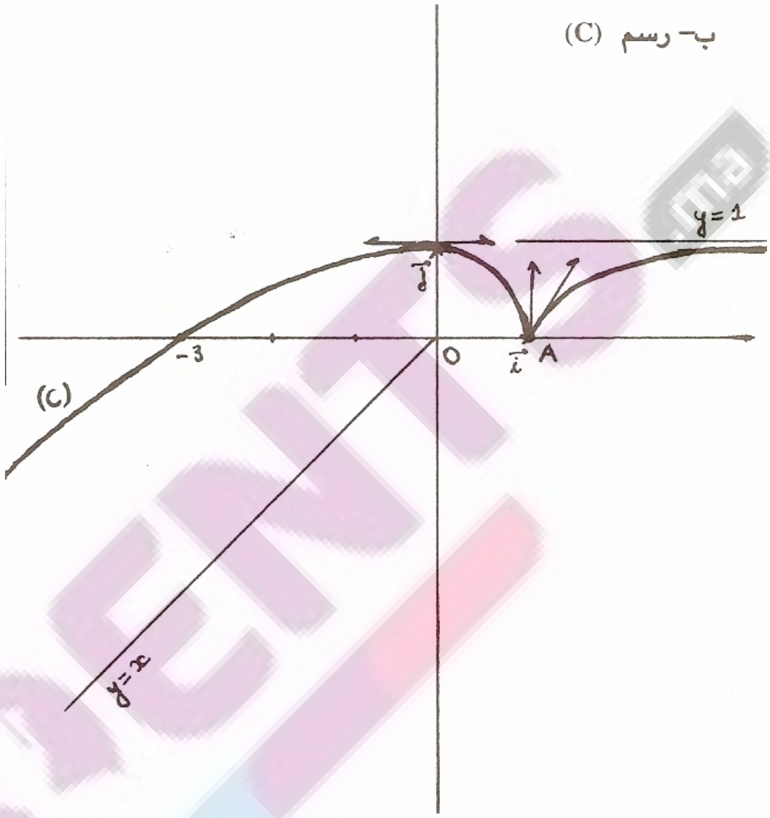
فإن : $=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}+(\frac{2}{x}-2).\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

وبما أن :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} x-1+2\sqrt{1-x}-x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1-x}-1 = +\infty$$

فإن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة y= x

ب- رسم (C)



5- أ- لنبين أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال I

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

فإن فهي تقابل من $[1,+\infty[$ نحو المجال :

$$J = f([1,+\infty[) = [0,1[$$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[0,1[$ نحو $[1,+\infty[$

ب- حساب $g^{-1}(x)$

ليكن x عنصرا من $[0,1[$ و y عنصرا من $[1,+\infty[$

لدينا : $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3-1}{y^3+1} = x$$
$$\Leftrightarrow y^3-1 = x(y^3+1)$$
$$\Leftrightarrow y^3-1 = xy^3+x$$
$$\Leftrightarrow y^3-xy^3 = x+1$$
$$\Leftrightarrow y^3(1-x) = x+1$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{x+1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}}$$

إذن $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$ لكل x من $[0,1[$

ج- لنبين أن g^{-1} دالة أصلية للدالة : $x \to \frac{2}{\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$

لدينا :

$$\left[g^{-1}(x)\right]' = \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}}\right)'$$

$$= \left[\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)'\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{(1-x)^2}.\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{(1-x)^2}.\frac{1}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\left[(1-x)^3\right]^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{\left(\frac{(1-x)^3(x+1)}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\left[(1-x)^2(x+1)\right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{\left[(1-2x+x^2)(x+1)\right]^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{(x+1-2x^2-2x+x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{(x^3-x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}} = .\frac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$$

إذن g^{-1} هي بالفعل دالة أصلية للدالة $x \to \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$ على المجال $]0,1[$

تمرين 17:

1-أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

$= +\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+} x-\sqrt{x} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

ب- تحديد الفرعين اللانهائيين

* بما أن : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

فإن (C) يقبل مقاربا رأسيا معادلته x = 0 أي محور الأراتيب.

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 1-0+0 = 1$

و : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

فإن (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة y = x

2-أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*} :

$$f'(x) = 1-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= 1-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}}$$

ولدينا : $(2x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = 2x\sqrt{x}-2x+x-\sqrt{x}+\sqrt{x}-1$

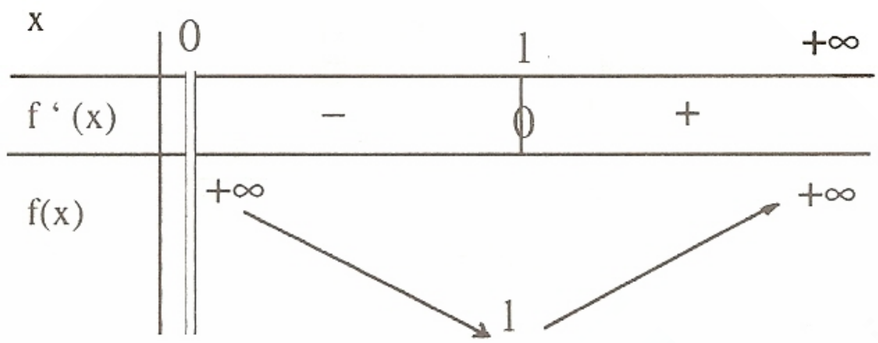
$= 2x\sqrt{x}-x-1$

إذن : $f'(x) = \left(\dfrac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- جدول تغيرات f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

ومنه جدول تغيرات الدالة f:



3-أ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Δ)

ليكن x عنصرا من IR^{+*}

لدينا : $f(x)-x=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

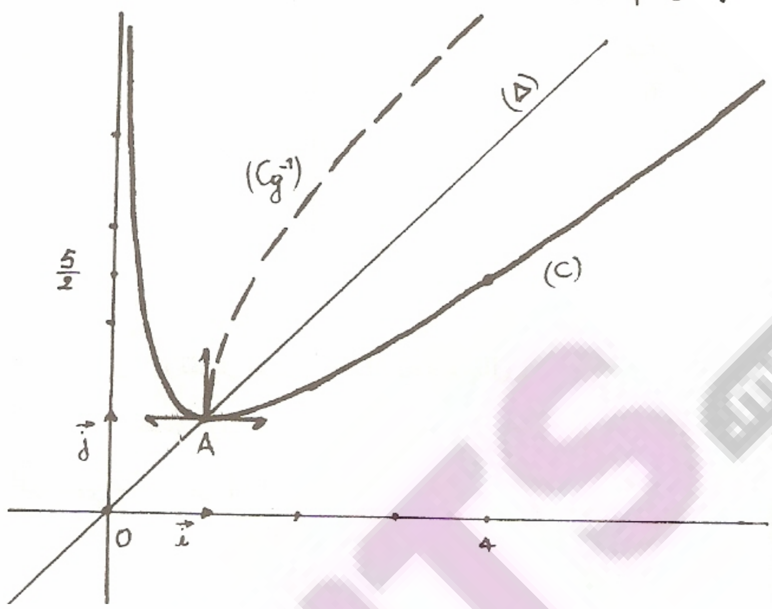
$=\frac{1-x}{\sqrt{x}}$

إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $1-x$

ومنه نستنتج الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f(x)-x$ والوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f(x) – x		+	0	–	
وضع (C) و (Δ)		(C) فوق (Δ)	(Δ) يقطع (C) في A(1, 1)	(C) تحت (Δ)	

ب- رسم (C)



4-أ- لنبين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1}

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

فإنها تقابل من $[1,+\infty[$ نحو المجال $[1,+\infty[$

$f([1,+\infty[)=[1,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[1,+\infty[$ نحو $[1,+\infty[$

ومنه فإن : $D_{g^{-1}}=[1,+\infty[$

ب- رسم $(C_{g^{-1}})$

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل منحنى f على $[1,+\infty[$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة : y = x (أنظر الشكل)

5-أ- لنبين بالترجع أن $a_n \succ 1$ لكل n من IN

* لدينا: $a_0=2$ ، إذن $a_0 \succ 1$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل n =0

- ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن $a_n \succ 1$ ولنبين أن $a_{n+1} \succ 1$

بما أن : $a_n \succ 1$

وf تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

فإن : $f(a_n) \succ f(1)$

أي أن $a_{n+1} \succ 1$

إذن: $(\forall n \in IN)\ a_n \succ 1$

ب- لنبين أن (a_n) تناقصية

لذلك سنبين بالترجع أن : $a_{n+1} \prec a_n$ لكل n من IN

- بما أن : $a_0 = 2$

و $a_1 = f(a_0) = f(2) = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

فإن : $a_1 \prec a_0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

- ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن : $a_{n+1} \prec a_n$ ولنبين أن : $a_{n+2} \prec a_{n+1}$

لدينا : $a_{n+1} \prec a_n$

و f تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

إذن : $f(a_{n+1}) \prec f(a_n)$

إذن : $a_{n+2} \prec a_{n+1}$

طريقة ثانية:

ليكن n عنصرا من IN

بما أن : $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n$

$$= a_n - \sqrt{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} - a_n = \frac{1 - -a_n}{\sqrt{a_n}}$$

وبما أن : $\sqrt{a_n} \succ 0$ و $1 - a_n \prec 0$ (لأن $a_n \succ 1$)

فإن : $\frac{1 - a_n}{\sqrt{a_n}} \prec 0$

وبالتالي فإن المتتالية (a_n) بالفعل تناقصية

ج- * استنتاج أن (a_n) متقاربة

بما أن المتتالية (a_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1 (لأن $a_n \succ 1$ لكل n من IN)

فإنها متقاربة

- **تحديد ℓ نهاية المتتالية** (a_n)

بما أن الدالة f متصلة على المجال $[1,+\infty[$

فإن النهاية ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

أي : $\ell - \sqrt{\ell} + \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \ell$ أي : $\frac{1 - \ell}{\sqrt{\ell}} = 0$

إذن: $\ell = 1$

تمرين 18:

1- لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-2\sqrt{1-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$
و
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+-\infty} x+2\sqrt{1-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2}}\right)$$
إذن :
$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)=-\infty$$

2-أ- الدالة f متصلة في 1 لأن :
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$$
ب- الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في 1.

لأن : $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$ و $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

وهذا يعني هندسيا أن المنحنى (C) يقبل في النقطة $A(1,1)$ مماسا رأسيا

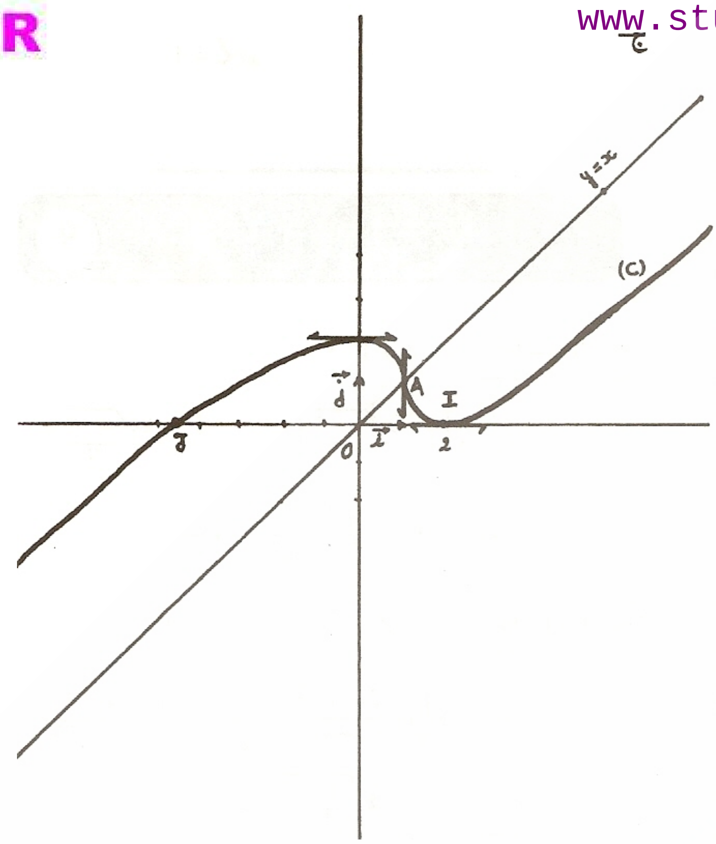
3-أ-
$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} & ;x\succ1 \\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} & ;x\prec1 \end{cases}$$

ب-

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↘	0	↗	$+\infty$

4- أ- (C) يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ فرعين شلجميين اتجاههما المستقيم ذو المعادلة y =x

ب- يقطع المنحنى (C) محور الأفاصيل في النقطتين $I(2,0)$ و $J(-2-2\sqrt{2},0)$



5-أ- ليكن x عنصرا من المجال $[2,+\infty[$

لدينا : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

$$= x - 2(x-1)^{\frac{1}{2}} = x - 2(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

يعني أن : $g(x) = \frac{x^2}{2} - 2.\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

إذن $= \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}.\sqrt{(x-1)^3} + c$

مع c ثابتة حقيقية

وبما أن $g(2) = \frac{2}{3}$. فإن : $\frac{4}{2} - \frac{4}{3} + c = \frac{2}{3}$

إذن : c=0

وبالتالي فإن : $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}$ لكل x من $[2,+\infty[$

ب- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{(x-1)^3}}{3x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{(x-1)^3}}{3\sqrt{x^4}}\right)$$

إذن : $= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^4}}\right) = +\infty$

*لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $[2,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]2,+\infty[$, $g'(x) = f(x)$ (لأن g دالة أصلية للدالة f)

ومنه فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f(x)$ على $]2,+\infty[$

وحسب جدول تغيرات الدالة f أو التمثيل المبياني للدالة f

نلاحظ أن $f(x) \succ 0$ لكل x من $]2,+\infty[$

وبالتالي فإن الدالة g تزايدية على $[2,+\infty[$

وبالتالي نجد جدول تغيرات الدالة g :

x	2		$+\infty$
g(x)	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$