الجداء السلمي

الجداء السلمي في الفضاء

تعريف :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء

A ، B ، C ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقط A ، B ، C بحيث الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P)

خواص : كل خواص الجداء السلمي في المستوي تبقى صحيحة على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء و أهمها مايلي :

من أجل $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ ؛ $\vec{w}$ أشعة من الفضاء من نفس المستوي و من أجل $k \in R$

1 – $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

2 – $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

3 – $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot k\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

4 – $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

5 – $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

6 – يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا و فقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

7 – الشعاع المعدوم $\vec{0}$ عمودي على كل أشعة الفضاء .

العبارة التحليلية للجداء السلمي في الفضاء

في أساس متعامد و متجانس . إذا كان $\vec{u}(x ; y ; z)$ و $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ فإن : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

نتيجة : إذا كانت $A(x ; y ; z)$ ؛ $B(x' ; y' ; z')$ نقطتان فإن المسافة بينهما :

$$AB = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

نشاط :

في معلم متعامد و متجانس من الفضاء نعتبر النقط **A(-1 ; -2 ; 0)** ؛ **B(3 ; 1 ; -2)** ؛ **C(-2 ; 0 ; 1)** **D(2 ; -1 ;0)**

1 – هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ؟

2 – هل المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان ؟

الحل :

1 – $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+1\\1+2\\-2-0\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2+2\\-1-0\\0-1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 4(4) + 3(-1) + (-2)(-1) = 16 - 3 + 2 = 15$

نتيجة : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} \neq 0$ إذن : (AB) و (CD) ليسا متعامدان .

2 – $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2+1\\0+2\\1-0\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4(-1) + 3(2) + (-2)(1) = -4 + 6 - 2 = 0$

نتيجة : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ إذن : (AB) و (AC) متعامدان .

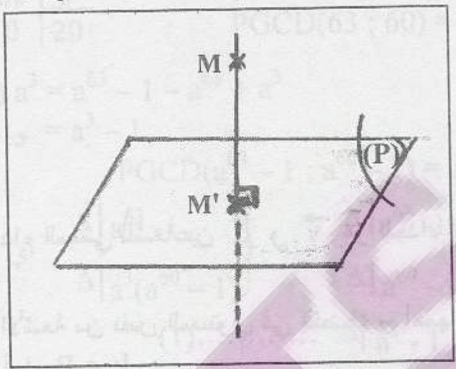
التعامد في الفضاء :

(P) مستوي . M نقطة من الفضاء

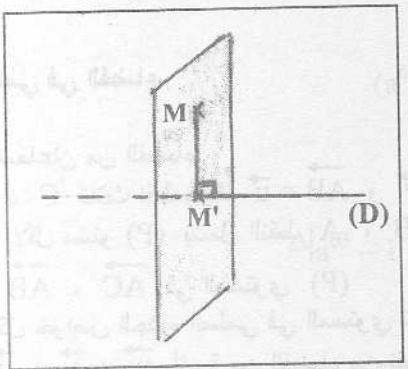
المستقيم العمودي على المستوي (P) و الذي يشمل النقطة M يقطع (P) في نقطة وحيدة M' تسمى المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P)

(D) مستقيم و M نقطة من الفضاء

المستوي العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع (D) في نقطة وحيدة M' تسمى المسقط العمودي للنقطة M على (D)



المسقط العمودي لنقطة على مستوي



المسقط العمودي لنقطة على مستقيم

نتائــج مباشرة

A و B نقطتان من مستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)

إذا كان C' هو المسقط العمودي لــ C على (P) فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$

A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء .

C و D نقطتان من الفضاء لا تنتميان إلى المستقيم (AB)

نسمي C' و D' على الترتيب المسقطين العموديين لــ C و D على (AB)

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

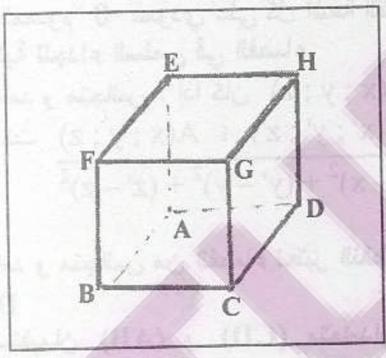
مثلا : في مكعب ABCDEFGH لدينا :

A هي المسقط العمودي لــ E على (AB)

B هي المسقط العمودي لــ F على (AB)

F هي مسقط G على المستوي ABEF

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$



تطبيق :

ABCDEFGH مكعب ضلعه a حيث a عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HC}$

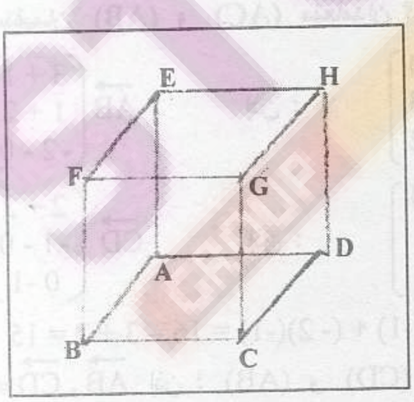
<u>الحــل</u> :

A هي المسقط العمودي لــ C على المستقيم (AE)

E هي المسقط العمودي لــ H على المستقيم (AE)

إذن :

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EA}$$
$$=-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}$$
$$=-AE^2$$
$$=-a^2$$



تطبيق :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

S سطح الكرة التي مركزها (0 ; 1 ; 2) و نصف قطرها $\sqrt{2}$

S' سطح الكرة التي قطرها [AB] حيث A(1 ; 0 ; - 2) ؛ B(0 ; -1 ; 2)

1 ــ أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة S .

2 ــ أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة S'

3 ــ عين العدد الحقيقي a حتى تكون النقطة C(a ; 1 ; 0) نقطة من S'

الحـل :

1 ـ معادلة السطح S :

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+4+1=2$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+3=0$ و هي معادلة السطح S .

2 ـ معادلة السطح S' :

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z+2\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-0\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$

$M\in S'$ يكافئ $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

يكافئ $x(x-1)+y(y+1)+(z+2)(z-2)=0$

يكافئ $x^2+y^2+z^2-x+y-4=0$ و هي معادلة السطح S'

3 ـ تكون C نقطة من السطح S' إذا و فقط إذا كانت إحداثياها تحقق معادلة السطح S'

أي : $a^2+(1)^2+(0)^2-a+1-4=0$

أي : $a^2-a-2=0$ معادلة من الدرجة (2)

$$\Delta=1+8=9$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ a'=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

نتيجة : توجد قيمتين لـ a تجعل النقطة C تنتمي إلى السطح S' و هما $a=2$ أو $a=-1$

المعادلة الديكارتية لمستو في الفضاء

تعريف : كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين مستقلين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على المستوي (P)

نتيجة : إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على مستو (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل أشعة المستوي (P) و عليه فكل مستقيم له $\vec{n}$ كشعاع توجيه هو مستقيم عمودي على المستوي (P)

تعريف مستو بنقطة منه و شعاع ناظم غير معدوم

$\vec{u}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء .

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

البحث عن معادلة المستوي (P)

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ و $A(a;b;c)$ و $M(x;y;z)$

منه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$

$M\in(P)$ يكافئ $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

يكافئ $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$

يكافئ $\alpha x+\beta y+\gamma z-\alpha a-\beta b-\gamma c=0$ و هي المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

خاصية : كل مستوي ذات الشعاع الناظم $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ له معادلة ديكارتية من الشكل $\alpha x+\beta y+\gamma z+c=0$ حيث c عدد حقيقي .

الحالات الخاصة : $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم في الفضاء

المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ له المعادلة $z=0$

المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ له المعادلة $y=0$

المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ له المعادلة $x=0$

نتائج : (P) و (P') مستويان معادلاتهما على الترتيب : $\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda=0$ و $ax+by+cz+d=0$

1 — $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

2 — $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P')

3 — (P) // (P') يكافئ يوجد عدد حقيقي غير معدوم k حيث $\vec{u}=k\vec{v}$

يكافئ $\begin{cases}\alpha=ka\\\beta=kb\\\gamma=kc\end{cases}$ مع $k\in R^*$

4 — $(p)\perp(p')$ يكافئ $\vec{u}.\vec{v}=0$

يكافئ $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$

تطبيق :

في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ؛ $B(1;0;-3)$ و $C(1;-1;2)$

1 — بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا

2 — أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3 — أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{BC}$ شعاع ناظمي له .

<u>الحل</u> :

1 — $\vec{AB}\begin{pmatrix}1+2\\0-0\\-3-1\end{pmatrix}$ منه $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}1+2\\-1-0\\2-1\end{pmatrix}$ منه $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$

بما أن : $3/3\neq 0/-1$ فإن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا .

2 — لتعيين معادلة المستوي (ABC) نبحث عن شعاع ناظم له .

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

إذن : $\vec{u}\perp\vec{AB}$ و $\vec{u}\perp\vec{AC}$

أي : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{AB}=0\\\vec{u}.\vec{AC}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}3\alpha+\beta(0)-4\gamma=0\\3\alpha-\beta+\gamma=0\end{cases}$

ليكن $\alpha=1$ إذن : $\begin{cases}3-4\gamma=0\\3-\beta+\gamma=0\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\gamma=3/4\\\beta=3+\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{4}\end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\15/4\\3/4\end{pmatrix}$

إذن : $4\vec{u}$ أيضا هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) لأن $4\vec{u}//\vec{u}$

إذن : يمكن أن ناخذ $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\15\\3\end{pmatrix}$

إذن : المستوي (ABC) يشمل A و $\vec{u}$ شعاع ناظم له

منه : $M \in (ABC)$ يكافئ $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ حيث $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء

يكافئ $4(x+2) + 15(y-0) + 3(z-1) = 0$

يكافئ $4x + 15y + 3z + 5 = 0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

3 ـ معادلة المستوي (P) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له .

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-0 \\ 2+3 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$M \in (P)$ يكافئ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

يكافئ $0(x+2) - 1(y-0) + 5(z-1) = 0$

يكافئ $-y + 5z - 5 = 0$

يكافئ $y - 5z + 5 = 0$ و هي معادلة المستوي (P)

بعد نقطة عن مستوي

في معلم متعامد و متجانس نعتبر (P) المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.

لتكن $A(x_A ; y_A ; z_A)$ نقطة من الفضاء

البعد بين النقطة A و المستوي (P) هو العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

المرجح : لتكن الجملة $\{(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) \ldots\ldots (A_n ; \alpha_n)\}$ حيث A_i نقط متمايزة من الفضاء و α_i أعداد حقيقية .

إذا كان $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ فإن توجد نقطة وحيدة G من الفضاء تحقق :

$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. هذه النقطة G تسمى مرجح الجملة المثقلة

$\{(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) \ldots (A_n ; \alpha_n)\}$

ملاحظة : إذا كانت كل المعاملات α_i متساوية فإن G تسمى مركز ثقل الجملة

مبرهنة :

من أجل كل نقطة M من الفضاء ، إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) \ldots (A_n ; \alpha_n)\}$

فإن : $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$

مثال : A ، B ، C نقط من الفضاء

عين مجموعة النقط (E) من الفضاء حيث $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3$

الحل : لتكن G مركز ثقل المثلث ABC

إذن : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

منه : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3$ يكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\| = 3$

يكافئ $3\|\overrightarrow{MG}\| = 3$

يكافئ $\|\overrightarrow{MG}\| = 1$

إذن : M تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

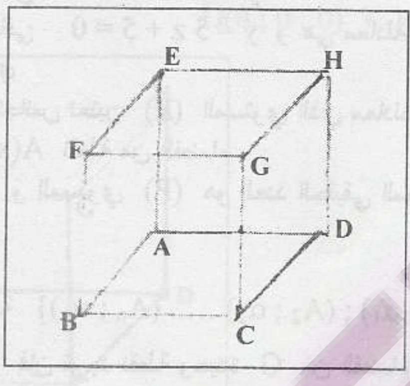
تمارين الكتاب المدرسي

التمرين – 1

ABCDEFGH مكعب ضلعه a . أحسب ما يلي :

1 – $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ 3 – $\vec{AB}\cdot\vec{CD}$ 5 – $\vec{AB}\cdot\vec{FG}$

2 – $\vec{DB}\cdot\vec{GC}$ 4 – $\vec{DB}\cdot\vec{HF}$ 6 – $\vec{ED}\cdot\vec{EC}$



الحـل – 1

1 – مسقط A على (AB) هو A
مسقط C على (AB) هو B

إذن : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = AB^2 = a^2$

2 – مسقط B على (GC) هو C
مسقط D على (GC) هو C

إذن : $\vec{DB}\cdot\vec{GC} = \vec{CC}\cdot\vec{GC} = 0$

3 – مسقط C على (AB) هو B
مسقط D على (AB) هو A

إذن : $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}\cdot\vec{BA} = -\vec{AB}\cdot\vec{AB} = -AB^2 = -a^2$

4 – مسقط H على (DB) هو D
مسقط F على (DB) هو B

إذن : $\vec{DB}\cdot\vec{HF} = \vec{DB}\cdot\vec{DB} = DB^2 = 2a^2$ (لأن $DB^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2$)

5 – مسقط F على (AB) هو B
مسقط G على (AB) هو B

إذن : $\vec{AB}\cdot\vec{FG} = \vec{AB}\cdot\vec{BB} = 0$

6 – مسقط C على (ED) هي D

إذن : $\vec{ED}\cdot\vec{EC} = \vec{ED}\cdot\vec{ED} = ED^2 = 2a^2$

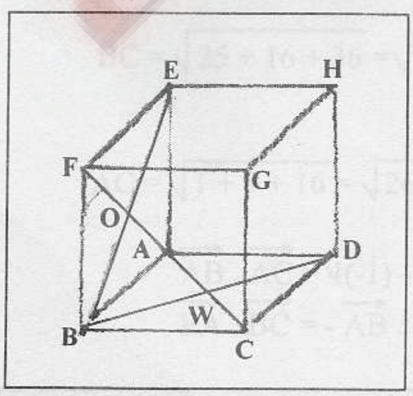
التمرين – 2

ABCDEFGH مكعب .

1 – أحسب $\vec{AG}\cdot\vec{BE}$ ثم $\vec{AG}\cdot\vec{BD}$

2 – إستنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوى (BED)

الحـل – 2



1 – ليكن 0 مركز الوجه ABFE

O هو مسقط A على (BE)
O هو مسقط G على (BE)

إذن : $\vec{AG}\cdot\vec{BE} = \vec{OO}\cdot\vec{BE} = 0$

ليكن w مركز الوجه ABCD

w هو مسقط A على (BD)
w هو مسقط G على (BD)

إذن : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ww}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$

2 ـ الأشعة $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ ليست مرتبطة خطيا و تنتمي إلى المستوي BED

بما أن $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{array}\right\}$ فإن $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}\end{array}\right\}$ إذن : $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BDE)

منه : المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED)

التمرين ـ 3

ABCDEFGH مكعب .

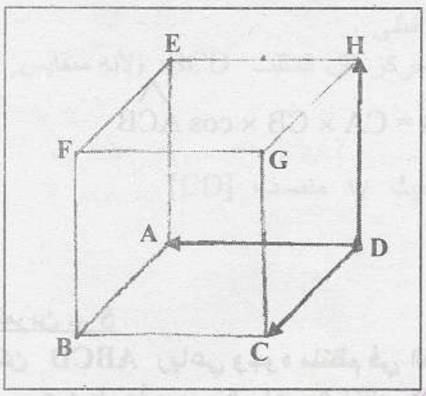
نعتبر المعلم $(D ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DH})$

عين إحداثيات النقط A ، G ، B ، E ، D ثم أثبت أن (AG) عمودي على المستوي (BED)

الحل ـ 3

في المعلم $(D ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DH})$ لدينا إحداثيات النقط كما يلي :

$A(1 ; 0 ; 0)$ ؛ $G(0 ; 1 ; 1)$ ؛ $B(1 ; 1 ; 0)$ ؛ $E(1 ; 0 ; 1)$ ؛ $D(0 ; 0 ; 0)$



منه : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0-1\\0-1\\0-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

نتائج : أ) $\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1}$ إذن : $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ ليس مرتبطين خطيا .

ب) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = -1(0) + 1(-1) + 1(1) = 0$ إذن : $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}$

ج) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = -1(-1) + 1(-1) + 1(0) = 0$ إذن : $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}$

من أ ، ب ، ج نستنتج أن $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BDE)

أي المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BDE)

التمرين ـ 4

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

لتكن النقط $A(0 ; -1 ; 1)$ ؛ $B(4 ; -2 ; 3)$ ؛ $C(-1 ; 2 ; -3)$

1 ـ أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ ؛ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

2 ـ عين قيمة مقربة إلى 0,1 درجة مئوية لأقياس الزوايا $\widehat{BAC}$ ؛ $\widehat{ABC}$ ؛ $\widehat{ACB}$

الحل ـ 4

1 ـ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-0\\-2+1\\3-1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ منه : $AB = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-4\\2+2\\-3-3\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\4\\-6\end{pmatrix}$ منه : $BC = \sqrt{25+16+36} = \sqrt{77}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-0\\2+1\\-3-1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$ منه : $AC = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4(-1) - 1(3) + 2(-4) = -4 - 3 - 8 = -15$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -[4(-5) - 1(4) + 2(-6)] = -(-36) = 36$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1(-5)+3(4)-4(-6)=41$$

نتائج : باستعمال تعريف الجداء السلمي حيث $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\cdot\vec{v})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ منه $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}$

أي $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{-15}{\sqrt{21}\times\sqrt{26}}$

منه : $\widehat{BAC}\approx130°$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$ منه $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\cdot BC}$

أي $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{36}{\sqrt{21}\times\sqrt{77}}$

منه : $\widehat{ABC}\approx26{,}45°$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos\widehat{ACB}$ منه $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CA\cdot CB}$

$\cos\widehat{ACB}=\dfrac{41}{\sqrt{21}\times\sqrt{77}}\approx0{,}91632982$

منه $\widehat{ACB}\approx24°$

التمرين ــ 5

ليكن ABCD رباعي وجوه منتظم في الفضاء رأسه A حيث $AB=BC=CD=AC=AD=BD=a$

1 ــ عين طبيعة وجوه الرباعي المنتظم ABCD

2 ــ أحسب بدلالة a كل من $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

3 ــ إستنتج قيمة $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$

4 ــ ماذا تستنتج بالنسبة للأحرف المتقابلة من الرباعي ABCD ؟

ليكن H المسقط العمودي لــ A على المستوي (BCD)

5 ــ أحسب $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$ (يمكن وضع $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}$)

6 ــ أحسب AH بدلالة a

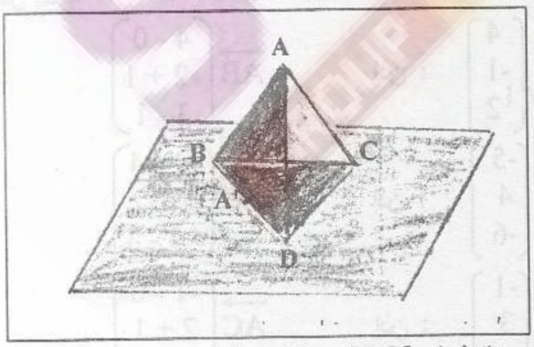
7 ــ أحسب حجم الهرم ABCD بدلالة a

الحــل ــ 5

1 ــ بما أن كل أحرف الرباعي ABCD متقايسة فإن كل وجه من الأوجه الأربعة هو مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه a كما هو موضح في الشكل (أنظر الشكل)

2 ــ المستوي الذي يشمل A و يعامد المستقيم (BD) يقطع (BD) في منتصف القطعة [BD] و لتكن A'

منه : A' هي المسقط العمودي لــ A على (BD) .



إذن : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\dfrac{1}{2}BD^2$

$=\dfrac{1}{2}a^2$

المستوي الذي يشمل A و يعامد (BC) يقطع (BC) في منتصف القطعة [BC] و لتكن A"

إذن : A" هي مسقط A على [BC]

منه : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA''}\cdot\overrightarrow{BC}$

$$= \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BC}$$
$$= \frac{1}{2}\ BC^2$$
$$= \frac{1}{2}\ a^2$$

3 —
$$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$$
$$= \overrightarrow{BA}(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$$
$$= -\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BD}$$
$$= -\frac{1}{2}\ a^2 + \frac{1}{2}\ a^2$$
$$= 0$$

4 — $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CD} = 0$: إذن $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD}$

بنفس الطريقة نستنتج أن الأحرف المتقابلة من الرباعي $ABCD$ متعامدة مثنى مثنى .

5 — H هو المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) إذن : H هي مركز ثقل المثلث BCD (لأنه متقايس الأضلاع)

منه : $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$

B تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ إذن : مسقط B على (CD) هو w حيث w منصف $[CD]$

لكن H تنتمي إلى محور $[CD]$ إذن : مسقط H على (CD) هو w

نتيجة : $\overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ww}\,.\,\overrightarrow{CD} = 0$

6 — في المثلث القائم HAC لدينا : $AH^2 + HC^2 = AC^2$

أي $AH^2 = AC^2 - HC^2$

منه : $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2}$ ………. (1)

في المثلث القائم HCW لدينا : $\widehat{HCW} = \frac{\pi}{6}$ لأن (CH) منصف الزاوية $[CB\,;CD]$

منه : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{CW}{HC}$ أي $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\,HC}$ منه : $HC = \frac{1}{\sqrt{3}}\ a$

بالتعويض في (1) نحصل على :
$$AH = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{\sqrt{3}}\ a)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}\ a^2}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}\ a^2}$$
$$= a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

7 — حجم الهرم V هو ثلث جداء الإرتفاع H في مساحة القاعدة BCD

لتكن S مساحة القاعدة BCD

إذن : $S = \frac{WB \times CD}{2}$

لنبحث عن WB :

في المثلث القائم WBC : $WC^2 + WB^2 = CB^2$

أي : $WB^2 = CB^2 - WC^2$

أي : $WB^2 = a^2 - (\frac{1}{2}\ a)^2$

أي : $WB^2 = a^2 - \frac{1}{4}\ a^2$

أي : $WB^2 = \frac{3}{4} a^2$

أي : $WB = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

إذن : $S = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} a \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

منه : $V = \frac{1}{3} AH \times S = \frac{1}{3} \times a\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

أي : $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

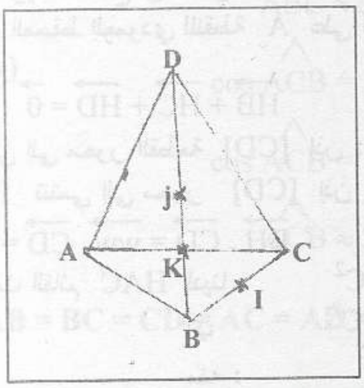
<u>التمرين – 6</u>

ABCD رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a .

I ، J ، K منتصفات [BC] ، [BD] و [AC] على الترتيب . أحسب ما يلي :

1 – $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ 3 – $\overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AK}$

2 – $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IK}$



<u>الحـل – 6</u>

1 – B تنتمي إلى محور [AC] إذن مسقط B على (AC) هي K منتصف [AC]

منه : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} . \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2} AC^2$

$= \frac{1}{2} a^2$

2 – الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{IK}$ متوازيان و متعاكسان في الاتجاه .

إذن : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IK} = - AB . IK$

$= - a \times \frac{a}{2}$ لأن المثلث ICK متقايس الأضلاع .

$= - \frac{1}{2} a^2$

3 – المستوي الذي يشمل D و يعامد (AK) يقطع (AK) في K إذن : K هو المسقط العمودي لـ D على (AK) منه :

$\overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK} . \overrightarrow{AK} = AK^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} a^2$

<u>التمرين – 7</u>

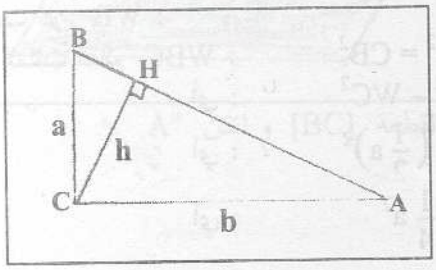
ABC مثلث قائم في C . H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

نضع AC = b ؛ BC = a ؛ CH = h

بين أن $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

<u>الحـل – 7</u>

لتكن S مساحة المثلث ABC



بما أن $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$ فإن $S = \frac{1}{2} AC \times CB = \frac{1}{2} a b$

من جهة أخرى : $S = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{h}{2} \times AB$

منه : $\frac{1}{2} a b = \frac{h}{2} AB$ إذن : $AB = \frac{a b}{h}$

في المثلث القائم CAB لدينا : $AC^2 + CB^2 = AB^2$

أي : $b^2 + a^2 = AB^2$

أي : $b^2 + a^2 = \left(\frac{a\,b}{h}\right)^2$

أي : $b^2 + a^2 = \frac{a^2\,b^2}{h^2}$

أي : $\frac{b^2 + a^2}{a^2\,b^2} = \frac{1}{h^2}$

منه : $\frac{b^2}{a^2\,b^2} + \frac{a^2}{a^2\,b^2} = \frac{1}{h^2}$

أي : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$ و هو المطلوب

التمرين ــ 8

SABCD هرم قاعدته المربع ABCD الذي مركزه O و ضلعه a

h هو طول الارتفاع OS

1 ــ أحسب بدلالة a و h الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}$ ؛ $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AS}$ ؛ $\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD}$

2 ــ أحسب V حجم الهرم

3 ــ كيف يمكن إختيار h حتى يكون (SB) و (SD) متعامدين . ما هي قيمة V المرافقة ؟

4 ــ لتكن النقط $A\left(\frac{7}{2} ; \frac{15}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ ؛ $B(2 ; -10 ; 1/2)$ ؛ $C(-2 ; -5/2 ; -15)$ ؛ $D(-25/2 ; 0 ; -1)$

بين أن الرباعي الوجوه ABCD منتظم ثم أحسب حجمه v

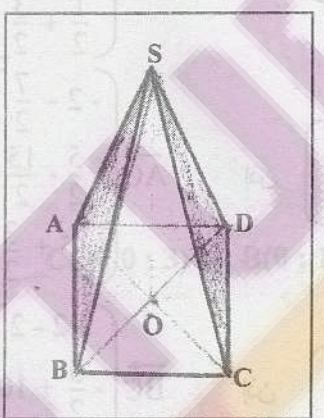
الحـل ــ 8

1 ــ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ إذن : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = 0$

O هو المسقط العمودي لـ S على (AO)

إذن : $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AO}$

$= AO^2$



حسب فيثاغورث : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

أي : $AC^2 = 2\,a^2$

منه : $AC = a\sqrt{2}$

إذن : $AO = \frac{AC}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

منه : $AO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,a^2$

نتيجة : $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\,a^2$

$\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD} = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB})\,.\,\overrightarrow{SD}$

$= \overrightarrow{SO}\,.\,\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{SD}$

$= \overrightarrow{SD}\,.\,\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OD}$ لأن $\left\{\begin{array}{l}\text{مسقط O على (SD) هي D} \\ \text{مسقط S على (OB) هي O}\end{array}\right.$

$= SD^2 - \overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{OD}$

$= SD^2 - \overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{BO}$ لأن O منتصف [BD]

$= SD^2 - BO^2$

في المثلث القائم SOD لدينا : $OS^2 + OD^2 = SD^2$

منه : $\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD} = OS^2 + OD^2 - BO^2$

أي : $\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD} = OS^2$ لأن $OD = BO$

أي : $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SD} = h^2$

2 ـ $V = \frac{1}{3} Sh^3$ حيث S هي مساحة القاعدة $ABCD$

منه : $V = \frac{1}{3} a^2 h^3$

3 ـ يكون (SB) و (SD) متعامدان إذا و فقط إذا كان : $SD^2 + SB^2 = BD^2 \;\dots\dots\dots\; (I)$

$BD^2 = 2a^2 \;\dots\dots\; (1)$ لأن : $BD^2 = AD^2 + AB^2 = 2a^2$

$SD^2 = SB^2 = h^2 + \frac{1}{2}a^2 \;\dots\dots\; (2)$ لأن : $SD^2 = OS^2 + OD^2 = h^2 + \frac{1}{2}a^2$

منه : العلاقة (I) تصبح : $2\left(h^2 + \frac{1}{2}a^2\right) = 2a^2$

أي : $2h^2 + a^2 = 2a^2$

أي : $2h^2 = a^2$

أي : $h^2 = \frac{a^2}{2}$

منه : $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ و هو المطلوب

في هذه الحالة : $V = \frac{1}{3}a^2 \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{a^5}{6\sqrt{2}}$

4 ـ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 - \frac{7}{2} \\ -10 - \frac{15}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3/2 \\ -35/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ منه $AB = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1225}{4} + 4} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 - \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} \\ -15 + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -11/2 \\ -10 \\ -27/2 \end{pmatrix}$ منه $AC = \sqrt{\frac{121}{4} + 100 + \frac{729}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 - 2 \\ -\frac{5}{2} + 10 \\ -15 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 15/2 \\ -31/2 \end{pmatrix}$ منه $BC = \sqrt{16 + \frac{225}{4} + \frac{961}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} + \frac{25}{2} \\ \frac{15}{2} - 0 \\ -\frac{3}{2} + 1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 16 \\ 15/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ إذن : $DA = \sqrt{256 + \frac{225}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 2 + \frac{25}{2} \\ -10 - 0 \\ \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 29/2 \\ -10 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ إذن : $BD = \sqrt{\frac{841}{4} + 100 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2+\frac{25}{2}\\ -\frac{5}{2}-0\\ -15+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}21/2\\ -5/2\\ -14\end{pmatrix}$ إذن : $DC=\sqrt{\frac{441}{4}+\frac{25}{4}+196}=\sqrt{\frac{1250}{4}}$

نتيجة : D لا تنتمي إلى المستوي ABC و $AB = AC = AD = BC = DB = DC$

إذن : الرباعي الوجوه ABCD منتظم

منه : مسقط النقطة D على المستوي ABC هي مركز ثقل المثلث ABC

إذن : إرتفاعه هو $\alpha\sqrt{\frac{3}{2}}$ حيث α هو طول الضلع .

في هذه الحالة $\alpha=\sqrt{\frac{1250}{4}}$

إذن : الارتفاع هو : $h=\sqrt{\frac{1250}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{625}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$

منه : مساحة القاعدة : $S=\frac{1}{2}\alpha h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1250}{4}}\times\frac{25\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{25}{\sqrt{2}}\times\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{625\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

إذن : $V=\frac{1}{3}Sh^3=\frac{1}{3}\times\frac{625\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\times\left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$$=\frac{625\times\sqrt{3}\times(25)^3\times 9\sqrt{3}}{3\times 4\times\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{625\times 25^3\times 9}{32}\approx 2746582{,}031$$

التمرين ـــ 9

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . نعتبر النقط A(-1 ; 1 ; 2) ، B(0 ; 1 ; 0) ، C(2 ; 0 ; 3)

1 ـــ أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

2 ـــ عين قيمة مقربة إلى 0,1 درجة لقياس الزوايا $\widehat{BAC}$ ، $\widehat{ABC}$ ، $\widehat{ACB}$

الحـل ـــ 9

لنبحث أولا عن مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$ كمايلي :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0+1\\ 1-1\\ 0-2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$ إذن : $AB=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+1\\ 0-1\\ 3-2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ إذن : $AC=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-0\\ 0-1\\ 3-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$ إذن : $BC=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$

1 ـــ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1(3)+0(-1)-2(1)=1$

$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = - \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = - [1(2) + 0(-1) - 2(3)] = 4$

$\overrightarrow{CA} . \overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{AC}) . (- \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BC} = 3(2) - 1(-1) + 1(3) = 10$

2 ــ باستعمال تعريف الجداء السلمي لدينا ما يلي :

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ منه $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}}{AB . AC}$

أي $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{11}}$

أي $\cos \widehat{BAC} = 0{,}134839$

منه : $\widehat{BAC} \approx 82{,}25°$

$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$ منه $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}}{BA . BC}$

أي $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{14}}$

أي $\cos \widehat{ABC} = 0{,}47809$

منه : $\widehat{ABC} \approx 61{,}43°$

$\overrightarrow{CA} . \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$ منه $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{\overrightarrow{CA} . \overrightarrow{CB}}{CA . CB}$

أي $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{10}{\sqrt{11} \times \sqrt{14}}$

أي $\cos \widehat{ACB} = 0{,}0{,}8058$

منه : $\widehat{ACB} \approx 36{,}31°$

تحقيق : مجموع أقياس زوايا مثلث هو $180°$

لدينا : $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 82{,}25° + 61{,}43° + 36{,}31° \approx 179{,}99°$

التمرين ــ 10

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ عين مركبات أشعة ناظمية لكل من المستويات التالية :

$(P_1) : x + y - z = 0$

$(P_2) : x - 2y = 0$

$(P_3) : \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + 3 = 0$

$(P_4) : 3y - z = 0$

الحـل ــ 10

كل مستوى ذات المعادلة $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ له شعاع ناظمي $\vec{u}$ حيث $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

منه النتائج التالية :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1)

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2)

$\vec{w}\begin{pmatrix}1/2\\ -1/4\\ -3/4\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_3)

$\vec{n}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_4) .

التمرين ـ 11

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل $A(1\,;-4\,;3)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له .

الحل ـ 11

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء . إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+4\\z-3\end{pmatrix}$

$M\in(P)$ يكافئ $\vec{u}\perp\overrightarrow{AM}$

يكافئ $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

يكافئ $1(x-1)+0(y+4)-2(z-3)=0$

يكافئ $x-1-2z+6=0$

يكافئ $x-2z+5=0$ و هي معادلة المستوي (P)

التمرين ـ 12

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي ذو المعادلة $-x+2y+z-3=0$

و الذي يشمل النقطة $A(-1\,;2\,;-3)$

الحل ـ 12

المستوي ذو المعادلة $-x+2y+z-3=0$ له شعاع ناظمي $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z+3\end{pmatrix}$

$M\in(P)$ يكافئ $\vec{u}\perp\overrightarrow{AM}$

يكافئ $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

يكافئ $-1(x+1)+2(y-2)+1(z+3)=0$

يكافئ $-x+2y+z-2=0$ و هي معادلة المستوي (P)

ملاحظة : يمكن البحث عن معادلة المستوي (P) بطريقة أخرى كمايلي :

(P) يوازي المستوي ذو المعادلة $-x+2y+z-3=0$ إذن : (P) له معادلة من الشكل :

$-x+2y+z+\alpha=0$ حيث α عدد حقيقي ثابت

بما أن A تنتمي إلى (P) فإن إحداثياتها تحقق معادلة المستوي (P)

أي : $-(-1)+2(2)+(-3)+\alpha=0$ منه $\alpha+2=0$ أي $\alpha=-2$

نتيجة : معادلة (P) هي : $-x+2y+z-2=0$

في كل التمارين التابعة الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

التمرين ـ 13

إليك المعادلات الديكارتية لأربع مستويات :

(P_1) : $-x+2y+z-3=0$ ، (P_3) : $x-2y-z=0$

(P_2) : $x-2y+z+3=0$ ، (P_4) : $2x+3y-4z+2=0$

المطلوب : أذكر المستويات المتوازية و المتعامدة .

الحل ـ 13

لنبحث عن $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$ ، $\vec{u_3}$ ، $\vec{u_4}$ الأشعة الناظمية على الترتيب للمستويات (P_1) ؛ (P_2) ؛ (P_3) ؛ (P_4)

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_3}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_4}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=-1-4+1=-4$ إذن : (P_1) و (P_2) ليسا متعامدان .

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_3}=-1-4-1=-6$ إذن : (P_1) و (P_3) ليسا متعامدان .

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_4} = -2+6-4=0$: إذن (P_1) و (P_4) متعامدان .

$\vec{u_2}\cdot\vec{u_3} = 1+4-1=4$: إذن (P_2) و (P_3) ليسا متعامدان .

$\vec{u_2}\cdot\vec{u_4} = 2-6-4=-8$: إذن (P_2) و (P_4) ليسا متعامدان .

$\vec{u_3}\cdot\vec{u_4} = 2-6+4=0$: إذن (P_3) و (P_4) متعامدان .

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$: إذن $-\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ منه : $-\vec{u_1}=\vec{u_3}$

إذن : $\vec{u_1} \parallel \vec{u_3}$

منه : المستويان (P_1) و (P_3) متوازيان .

التمرين – 14

(P) مستوي معادلته $-5x+y-z-6=0$

A نقطة من الفضاء إحداثياتها $A(-6\,;2\,;-1)$

بين أن النقطة $B(-1\,;1\,;0)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)

الحـل – 14

يمكن الاجابة على هذا السؤال بطريقتين مختلفتين كما يلي :

الطريقة (1) يكفي أن نثبت أن : $\left\{\begin{array}{l} B\in(P) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1)\\ \vec{AB} \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P) \ldots\ldots (2)\end{array}\right.$

(1) هل $B\in(P)$ ؟ $-5(-1)+1-0-6=5+1-6=0$

إذن : فعلا $B\in(P)$

(2) هل $\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P) ؟

لدينا : $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1+6\\1-2\\0+1\end{pmatrix}$ منه $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$

بما أن $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن $-\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P)

و عليه فإن $\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P) أيضا .

نتيجة : الشرطين (1) و (2) محققين إذن : فعلا B هي المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)

الطريقة (2) يكفي أن نثبت أن بعد النقطة B عن A يساوي المسافة بين النقطة A و المستوي (P) و أن $B\in(P)$

لدينا احداثيات B تحقق معادلة (P) إذن : $B\in(P)$

لتكن D المسافة بين A و (P) : $D=\dfrac{|-5(-6)+2-(-1)-6|}{\sqrt{25+1+1}}=\dfrac{27}{\sqrt{27}}=\sqrt{27}$

لنحسب AB : $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$

إذن : $AB=\sqrt{25+1+1}=\sqrt{27}$

نتيجة : B هي فعلا المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)

التمرين – 15

لتكن النقط $A(-1\,;1\,;1)$ ، $B(0\,;0\,;-1)$ ، $C(3\,;-2\,;1)$

1 – بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا .

2 – عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

3 – أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

الحـل – 15

1 – $\vec{AB}\begin{pmatrix}0+1\\0-1\\-1-1\end{pmatrix}$ إذن : $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3+1\\-2-1\\1-1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$

$\frac{1}{4} \neq \frac{-1}{-3}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

منه : النقط A ، B ، C تعين مستويا .

2 – ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) حيث a و b عددان حقيقيان

إذن : $\vec{u}$ عمودي على كل أشعة المستوي (ABC) و خاصة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

منه : $\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{u}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}1-a-2b=0\\ 4-3a+0=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}1-a=2b\\ 3a=4\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}b=\frac{1-a}{2}\\ a=4/3\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}b=\dfrac{1-\frac{4}{3}}{2}=\frac{-1}{6}\\ a=\frac{4}{3}\end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4/3\\-1/6\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

إذن : $6\vec{u}$ أيضا شعاع ناظمي أي $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

3 – لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(ABC)$ يكافئ $\vec{v}\perp\overrightarrow{AM}$

يكافئ $\vec{v}.\overrightarrow{AM}=0$

يكافئ $6(x+1)+8(y-1)-1(z-1)=0$

يكافئ $6x+8y-z-1=0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

تحقيق : $6(-1)+8(1)-1-1=8-8=0$ إذن : $A\in(ABC)$

$6(0)+8(0)-(-1)-1=1-1=0$ إذن : $B\in(ABC)$

$6(3)+8(-2)-(1)-1=18-16-2=0$ إذن : $C\in(ABC)$

التمرين – 16

1 – أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي قطرها [AB] حيث $A(7\,;2\,;-2)$ و $B(-3\,;0\,;-4)$

2 – أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (π) مماس السطح (S) في النقطة A

الحـل – 16

1 – مركز سطح الكرة (S) هو w حيث w منتصف [AB] و نصف قطرها $\frac{AB}{2}$

إذن : $w\left(\frac{7-3}{2}\,;\frac{2+0}{2}\,;\frac{-2-4}{2}\right)$ أي $w(2\,;1\,;-3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-7\\0-2\\-4+2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\-2\\-2\end{pmatrix}$ منه : $AB=\sqrt{100+4+4}=\sqrt{108}$

نتيجة : سطح الكرة (S) له المعادلة : $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\left(\frac{\sqrt{108}}{2}\right)^2$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+4+1+9=108/4$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+14=27$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-13=0$

2 ــ المستوي (π) مماس لــ (S) عند النقطة A إذن :

$$\left.\begin{array}{l}(\pi) \text{ يشمل } A\\ \text{الشعاع } \overrightarrow{WA} \text{ ناظم للمستوي } (\pi)\end{array}\right\}$$

لدينا $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}7-2\\2-1\\-2+3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء .

$M\in(\pi)$ يكافئ $\overrightarrow{WA}\perp\overrightarrow{AM}$

يكافئ $\overrightarrow{WA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

يكافئ $5(x-7)+1(y-2)+1(z+2)=0$

يكافئ $5x+y+z-35=0$ و هي معادلة المستوي (π)

التمرين ــ 17

(S) سطح كرة معادلته $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$

1 ــ عين w مركز السطح (S)

2 ــ أحسب بعد النقطة w عن المستوي (P) ذو المعادلة $4x-3z-6=0$

3 ــ هل المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) ؟ علل إجابتك .

الحــل ــ 17

1 ــ $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$ يكافئ $x^2+y^2+2y+1-1+z^2-6z+9-9-15=0$

يكافئ $(x-0)^2+(y+1)^2-1+(z-3)^2-9-15=0$

يكافئ $(x-0)^2+(y+1)^2+(z-3)^2-25=0$

يكافئ $(x-0)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(5)^2$

إذن : (S) هو سطح الكرة التي مركزها $w(0\,;-1\,;3)$ و نصف قطرها 5 .

2 ــ ليكن D بعد النقطة w على المستوي (P)

$$D=\frac{|4(0)-3(3)-6|}{\sqrt{(4)^2+(0)^2+(-3)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

3 ــ نصف قطر الكرة S أكبر من بعد المركز w عن المستوي (P) إذن : (P) يقطع السطح (S) .

التمرين ــ 18 (بكالوريا)

لتكن النقط $A(-1\,;2\,;-1)$ ، $B(-6\,;1\,;1)$ ، $C(4\,;-3\,;3)$ ، $D(-1\,;-5\,;-1)$.

1 ــ عين مركبات شعاع ناظمي $\vec{u}$ للمستوي (BCD)

2 ــ إستنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BCD)

3 ــ عين إحداثيات النقطة H حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD)

4 ــ أحسب $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$

5 ــ نسمي إرتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل أحد الرؤوس و عمودي على الوجه المقابل .

لتكن النقط $I(1\,;0\,;0)$ ، $J(0\,;1\,;0)$ ، $K(0\,;0\,;1)$

هل ارتفاعات الرباعي OIJK تتلاقى في نقطة واحدة .

الحــل ــ 18

1 ــ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4+6\\-3-1\\3-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10\\-4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-4\\-5+3\\-1-3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\2\\-4\end{pmatrix}$

ليكن $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ شعاع من الفضاء

يكون $\vec{v}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD) إذا و فقط إذا كان $\left\{\begin{array}{l}\vec{v}.\overrightarrow{BC}=0\\\vec{v}.\overrightarrow{CD}=0\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}.\overrightarrow{BC}=0\\\vec{v}.\overrightarrow{CD}=0\end{array}\right.$ يكافئ $\left\{\begin{array}{l}10-4a+2b=0\\-5-2a-4b=0\end{array}\right.$

يكافئ $\left\{\begin{array}{l}(1)\ ......\ 20-8a+4b=0\\(2)\ ......\ -5-2a-4b=0\end{array}\right.$

بجمع (1) و (2) : $15-10a=0$

منه : $10a=15$

منه : $a=15/10$ أي $a=3/2$

بالتعويض في (2) : $4b=-5-2a$

أي : $4b=-5-2(3/2)$

أي : $4b=-8$ أي $b=-2$

نتيجة : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3/2\\-2\end{pmatrix}$ منه $2\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

نتيجة : يكفي أن نأخذ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (BCD)

2 ــ معادلة المستوي (BCD) :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD) إذن : المستوي (BCD) له معادلة ديكارتية من الشكل :

$2x+3y-4z+\alpha=0$ حيث $\alpha\in IR$

$B\in(BCD)$ إذن : $2(-6)+3(1)-4(1)+\alpha=0$

منه : $\alpha=13$

نتيجة : معادلة المستوي (BCD) هي $2x+3y-4z+13=0$

3 ــ لتكن $H(x\,;y\,;z)$ إحداثيات النقطة H

إذن : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z+1\end{pmatrix}$

تكون H مسقط عمودي لــ A على المستوي (BCD) إذا و فقط إذا كان :

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\ ....\ (1)\\\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CD}\ ....\ (2)\\H\in(BCD)\ ....\ (3)\end{array}\right.$$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ يكافئ $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$

يكافئ $10(x+1)-4(y-2)+2(z+1)=0$

يكافئ $10x-4y+2z+20=0$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CD}$ يكافئ $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD}=0$

يكافئ $-5(x+1)-2(y-2)-4(z+1)=0$

يكافئ $-5x-2y-4z-5=0$

$H\in(BCD)$ يكافئ $2x+3y-4z+13=0$

نتيجة : تكون H مسقط عمودي لـ A على (BCD) إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} (1) \ldots\ldots\ 10x-4y+2z+20=0 \\ (2) \ldots\ldots\ -5x-2y-4z-5=0 \\ (3) \ldots\ldots\ 2x+3y-4z+13=0 \end{cases}$$

نحل هذه الجملة كمايلي :

(3) تكافئ $(4)\ldots\ -2x-3y+4z-13=0$

(1) تكافئ $(5)\ldots\ 20x-8y+4z+40=0$

بجمع (2) و (4) : $-5x-2y-4z-5-2x-3y+4z-13=0$

أي : $-7x-5y-18=0 \ldots\ldots (6)$

بجمع (2) و (5) : $-5x-2y-4z-5+20x-8y+4z+40=0$

أي : $15x-10y+35=0 \ldots\ldots (7)$

نحل الجملة $\begin{cases} -7x-5y-18=0 \\ 15x-10y+35=0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 14x+10y+36=0 \\ 15x-10y+35=0 \end{cases}$

بالجمع : $29x+71=0$ منه $x=-71/29$

بالتعويض في المعادلة $-7x-5y-18=0$ لدينا :

$$5y=-7x-18=-7\left(\frac{-71}{29}\right)-18=\frac{497}{29}-18=\frac{-25}{29}$$

منه : $y=\dfrac{-25}{5\times 29}=\dfrac{-5}{29}$

بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :

$$2\left(\frac{-71}{29}\right)+3\left(\frac{-5}{29}\right)-4z+13=0$$

أي : $-\dfrac{142}{29}-\dfrac{15}{29}+13=4z$

أي $-\dfrac{157}{29}+13=4z$

أي : $4z=220/29$

أي $z=55/29$

نتيجة : H لها الاحداثيات $\left(\dfrac{-71}{29};\dfrac{-5}{29};\dfrac{55}{29}\right)$

4 — $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{-71}{29}+6 \\ \frac{-5}{29}-1 \\ \frac{55}{29}-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 103/29 \\ -34/29 \\ 26/29 \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{103}{29}(-5)-\dfrac{34}{29}(-2)+\dfrac{26}{29}(-4)$

$=\dfrac{1}{29}(-515+68-104)$

$=-551/29$

$=-19$

5 — المعلم متعامد و متجانس إذن لدينا النتائج التالية :

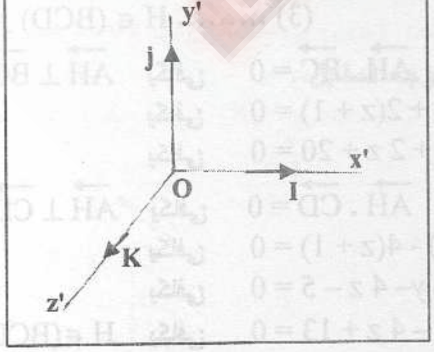
الارتفاع المتعلق بالرأس J هو محور التراتيب (yy')

الارتفاع المتعلق بالرأس I هو محور الفواصل (xx')

الارتفاع المتعلق بالرأس K هو محور الرواقم (zz')

الارتفاع المتعلق بالرأس O هو محور التراتيب

نتيجة : كل الارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة هي المبدأ O



التمرين ــ 19

لتكن النقط $A(1 ; 2 ; -2)$ ؛ $B(2 ; 3 ; -2)$ ؛ $D(0 ; 3 ; -2)$ ؛ $E(1 ; 2 ; -2+\sqrt{2})$

1 ــ تحقق أن $AB = AD = AE$

2 ــ تحقق أن المستقيمات (AB) ، (AD) ، (AE) متعامدة مثنى مثنى .

الحــل ــ 19

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\3-2\\-2+2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ منه $AB=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-1\\3-2\\-2+2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ منه $AD=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1-1\\2-2\\-2+\sqrt{2}+2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ منه $AE=\sqrt{0+0+2}=\sqrt{2}$

نتيجة : $AB = AD = AE = \sqrt{2}$

2 ــ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -1+1+0=0$ إذن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0+0+0=0$ إذن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = 0+0+0=0$ إذن $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AE}$

نتيجة : (AB) ، (AD) و (AE) متعامدة مثنى مثنى .

التمرين ــ 20

لتكن النقط $A(1 ; -1 ; 0)$ ؛ $B(2 ; 3 ; -4)$ ؛ $C(-3 ; 0 ; 1)$

$\vec{n}$ شعاع مركباته $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\15\\17\end{pmatrix}$

1 ــ تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على إستقامية

2 ــ أحسب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3 ــ عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يمر من النقطة $D(-2 ; 2 ; -1)$

الحــل ــ 20

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\3+1\\-4-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-1\\0+1\\1-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{4}{1}\neq\frac{1}{-4}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

منه : النقط A ، B ، C ليست على استقامية

2 ــ $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 1(8)+4(15)-4(17) = 8+60+68 = 0$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -4(8)+1(15)+1(17) = -32+32 = 0$

نتيجة : الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

إذن : $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء .

$M\in(ABC)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

يكافئ $8(x-1)+15(y+1)+17(z-0)=0$

يكافئ $8x+15y+17z+7=0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

4 – المستوي (P) يوازي المستوي (ABC) إذن : (P) له معادلة من الشكل :

$8x+15y+17z+\alpha=0$ حيث α عدد حقيقي ثابت .

$D\in(P)$ إذن : احداثيات D تحقق المعادلة $8x+15y+17z+\alpha=0$

منه : $8(-2)+15(2)+17(-1)+\alpha=0$

أي : $\alpha=16-30+17$

أي : $\alpha=3$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي : $8x+15y+17z+3=0$

التمرين – 21

لتكن النقط $A(-1\,;2\,;0)$ ؛ $B(-3\,;4\,;2)$ ؛ $C(1\,;-2\,;-1)$

1 – بين أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

2 – بين أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ يكون ناظمي للمستوي (ABC) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases}-2a+2b+2c=0\\2a-4b-c=0\end{cases}$

3 – استنتج شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) بمركبات صحيحة . ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC)

الحـل – 21

1 – $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3+1\\4-2\\2-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+1\\-2-2\\-1-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{2}{-4}\neq\frac{-2}{2}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

2 – $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}-2a+2b+2c=0\\2a-4b-c=0\end{cases}$ و هو المطلوب

3 – ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذن : $\begin{cases}-2a+2b+2c=0\ .....\ (1)\\2a-4b-c=0\ ....(2)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) : $2b+2c-4b-c=0$

أي : $-2b+c=0$

أي : $c=2b$

ليكن $b=2$ إذن : $c=4$

بالتعويض في (2) : $2a=4b+c$ أي : $2a=4(2)+4$

منه $a=12/2=6$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ملاحظة : الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (ABC) لأنه يوازي $\vec{n}$

إذن : نأخذ $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (ABC)$ يكافئ $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$

يكافئ $3(x+1) + 1\,(y-2) + 2(z-0) = 0$

يكافئ $3\,x + y + 2\,z + 1 = 0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

التمرين — 22

(P) مستوي معادلته $3\,x - y + 4\,z + 1 = 0$

أحسب ℓ بعد النقطة $A(-1\,;2\,;-1)$ عن المستوي (P)

الحـل — 22

$$\ell = \frac{|3(-1) - (2) + 4(-1) + 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (4)^2}} = \frac{|-3-2-4+1|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{8}{\sqrt{26}}$$

التمرين — 23

لتكن النقط $A(1\,;0\,;1)$ ، $B(3\,;-2\,;0)$ ، $C(2\,;4\,;-5)$ ، $D(3\,;5\,;3)$

1 — عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

2 — أحسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

الحـل — 23

1 — $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-2-0\\0-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\4-0\\-5-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{-2}{4} \neq \frac{2}{1}$ إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}2 - 2\,b - c = 0\\ 1 + 4\,b - 6\,c = 0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}4 - 4\,b - 2\,c = 0 \;......\; (1)\\ 1 + 4\,b - 6\,c = 0 \;......\; (2)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) : $4 + 1 - 2\,c - 6\,c = 0$

أي : $5 - 8\,c = 0$ منه $c = 5/8$

بالتعويض في (2) : $4\,b = 6\,c - 1$ منه $4\,b = 6(5/8) - 1$

أي $4\,b = \frac{15}{4} - 1$

أي $b = 11/16$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\11/16\\5/8\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ المستوي (ABC)

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix}16\\11\\10\end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

إذن : معادلة (ABC) هي : $16x + 11y + 10z + \alpha = 0$ حيث α عدد حقيقي ثابت

إذن : $A \in (ABC)$ إذن $16(1) + 11(0) + 10(1) + \alpha = 0$

منه : $26 + \alpha = 0$ أي $\alpha = -26$

نتيجة : معادلة المستوي (ABC) هي $16x + 11y + 10z - 26 = 0$

2 ـ لتكن ℓ المسافة بين D و المستوي (ABC)

$$\ell = \frac{|16(3) + 11(5) + 10(3) - 26|}{\sqrt{16^2 + 11^2 + 10^2}} = \frac{|48 + 55 + 30 - 26|}{\sqrt{256 + 121 + 100}} = \frac{107}{\sqrt{477}}$$

التمرين ـ 24

أحسب بعد النقطة O مبدأ المعلم عن المستوي (P) الذي معادلته : $2x - 3y + 6z - 7 = 0$

الحل ـ 24

لتكن ℓ بعد المبدأ O عن المستوي (P)

$$\ell = \frac{|2(0) - 3(0) + 6(0) - 7|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{7}{\sqrt{49}} = 1$$

التمرين ـ 25

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $y = 2x - 1$

M النقطة ذات الاحداثيات $M(3 ; 0 ; 2)$

1 ـ عين ℓ بعد النقطة M عن (P)

2 ـ استنتج بعد النقطة M عن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ في المستوي $(x o y)$

الحل ـ 25

1 ـ $y = 2x - 1$ يكافئ $2x - y - 1 = 0$

منه :

$$\ell = \frac{|2(3) - (0) + 0(2) - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 0}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

2 ـ لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستوي ذو المعادلة $y = 2x - 1$

إذن : $MH = \ell = \sqrt{5}$

و ليكن K مسقط النقطة M على المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$

من المستوي $(x o y)$ إذن : $HK = 2$ لأن راقم النقطة M هو 2 .

في المثلث القائم في H : HKM لدينا : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

منه : $\ell^2 + 2^2 = KM^2$

أي : $5 + 4 = KM^2$

منه : $KM = \sqrt{9} = 3$

نتيجة : بعد النقطة M عن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$ من المستوي $(x o y)$ هو 3 .

التمرين ـ 26

لتكن النقط $A(1 ; 0 ; -1)$ ؛ $B(2 ; 2 ; 3)$ ؛ $C(3 ; 1 ; -2)$ ؛ $D(-4 ; 2 ; 1)$

1 ـ بين أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته .

2 ـ بين أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC)

3 ـ استنتج معادلة للمستوي (ABC)

4 ـ أحسب الحجم V لرباعي الوجوه $DABC$

الحل ـ 26

1 ـ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\2-0\\3+1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ منه : $AB = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\1-0\\-2+1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ منه : $AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-2\\1-2\\-2-3\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$ منه : $BC=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$

نتيجة : $AB^2+AC^2=21+6=27=BC^2$

إذن : حسب فيثاغورت فإن ABC مثلث قائم في A

إذن : المساحة S للمثلث ABC هي : $S=\frac{1}{2}AB\times AC$

إذن : $S=\frac{1}{2}\sqrt{21}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

2 — $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(1)-3(2)+1(4)=0$ إذن : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2(2)-3(1)+1(-1)=0$ إذن : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

نتيجة : $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

3 — $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) إذن : (ABC) له المعادلة $2x-3y+z+\alpha=0$ حيث $\alpha\in IR$

$A\in(ABC)$ إذن : $2(1)-3(0)+(-1)+\alpha=0$

إذن : $\alpha=-1$

منه : معادلة المستوي (ABC) : $2x-3y+z-1=0$

4 — $V=\frac{1}{3}S\times H$ حيث H هو الارتفاع المتعلق بالرأس D

منه H هي المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC) كمايلي :

$$H=\frac{|2(-4)-3(2)+(1)-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

منه : $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=14/2=7$

ملاحظة : هذه المسافات و المساحات و الحجوم مقدرة بوحدة القياس

<u>التمرين — 27</u>

(P) و (Q) مستويان معرفين بالمعادلتين : $2x+y-z=0$ و $x-y+2z=0$ على الترتيب .

1 — تحقق أن $A(1;0;-3)$ متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

2 — عين مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

<u>الحـل — 27</u>

1 — المسافة بين A و المستوي (P) : $\frac{|2(1)+(0)-(-3)|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$

المسافة بين A و المستوي (Q) : $\frac{|(1)-(0)+2(-3)|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$

نتيجة : النقطة A متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

2 — لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

نسمي ℓ مسافة النقطة M عن المستوي (P)

نسمي h مسافة النقطة M عن المستوي (Q)

لدينا :
$$\begin{cases} \ell = \dfrac{|2x+y-z|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{|2x+y-z|}{\sqrt{6}} \\ h = \dfrac{|x-y+2z|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{|x-y+2z|}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

نتيجة : $\ell = h$ يكافئ $\dfrac{|2x+y-z|}{\sqrt{6}} = \dfrac{|x-y+2z|}{\sqrt{6}}$

يكافئ $|2x+y-z| = |x-y+2z|$

يكافئ $\begin{cases} 2x+y-z = x-y+2z \\ \text{أو} \\ 2x+y-z = -(x-y+2z) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 2x+y-z-x+y-2z = 0 \\ \text{أو} \\ 2x+y-z+x-y+2z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x+2y-3z = 0 \\ \text{أو} \\ 3x+z = 0 \end{cases}$

نتيجة : مجموعة النقط M المتساوية المسافة عن المستويين (P) و (Q) هي النقط التي تنتمي إلى أحد المستويين الذين معادلاتهما $x+2y-3z=0$ أو $3x+z=0$

مثلا : النقطة $A(1\,;0\,;-3)$ تنتمي إلى المستوي الذي معادلته $3x+z=0$

النقطة $B(1\,;1\,;1)$ تنتمي إلى المستوي الذي معادلته $x+2y-3z=0$

<u>التمرين ـ 28</u>

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء حيث ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين .

(P) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

تحقق أن (P) مستوي عمودي على المستوي (ABC) يطلب تعيين تقاطعهما .

<u>الحـل ـ 28</u>

لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(A\,;3)\,;(B\,;1)\}$ إذن : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG_1}$

لتكن G_2 مرجح الجملة $\{(B\,;1)\,;(C\,;1)\}$ إذن : $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_2}$ (G_2 هي منتصف $[BC]$)

إذن : $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$ يكافئ $\|4\overrightarrow{MG_1}\| = 2\|2\overrightarrow{MG_2}\|$

يكافئ $4\|\overrightarrow{MG_1}\| = 4\|\overrightarrow{MG_2}\|$

يكافئ $\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_2}\|$

إذن : M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_2]$

بما أن G_1 و G_2 تنتميان إلى المستوي (ABC) فإن المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_2]$ هو مستوي عمودي على المستوي (ABC) و يقطعه في المستقيم الذي هو محور القطعة المستقيمة $[G_1G_2]$

<u>التمرين ـ 29</u>

(P) مستوي . O نقطة من (P) و (Δ) مستقيم من (P) يشمل O

A نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوي (P)

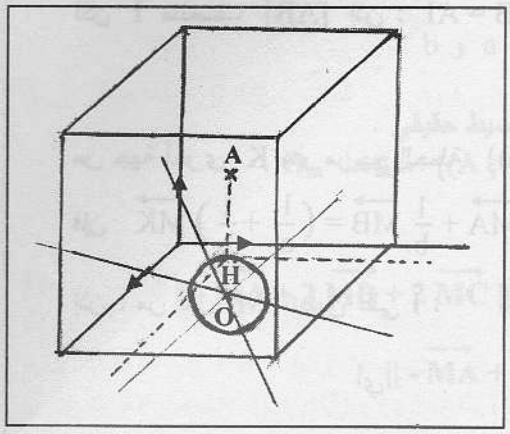
نرفق بالنقطة A المسقط العمودي M لـ A على المستقيم (Δ)

ما هي مجموعة النقط M لما يأخذ المستقيم (Δ) كل الوضعيات الممكنة .

<u>الحـل ـ 29</u>

M هي المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

(Δ) يشمل O إذن لما (Δ) يغير الوضعية فإن يدور حول النقطة O و عليه فإن المسافة بين O و M ثابتة و تساوي المسافة بين O و المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)



نتيجة : لتكن H المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)
إذن : لما (Δ) يأخذ كل الوضعيات الممكنة فإن M
تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها OH
(محتواة في المستوي (P))
ملاحظة : إذا كان المسقط العمودي لـ A على المستوي (P) هي O
فإن مجموعة النقط M لما (Δ) يأخذ كل الوضعيات هي النقطة O فقط .

التمرين – 30

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم . (P) هي مجموعة نقط الفضاء M التي تحقق :

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD})=0$$

ما هي طبيعة مجموعة النقط (P) ؟

الحـل – 30

لتكن الجملة المثقلة $\{(A\,;1)\,;(B\,;1)\,;(C\,;-1)\,;(D\,;-1)\}$
مجموع المعاملات معدوم إذن : الجملة لا تقبل مرجح .
منه : الشعاع $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ ثابت لا يتعلق باختيار النقطة M
نضع $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$
من أجل M تنطبق على A نحصل على : $\vec{u}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$
أي : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$
أي : $\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$
أي : $\vec{u}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$
لتكن الجملة المثقلة $\{(A\,;1)\,;(B\,;1)\,;(C\,;1)\,;(D\,;1)\}$
مجموع المعاملات غير معدوم يساوي 4 إذن الجملة تقبل مرجحا G هو مركز ثقل الرباعي الوجوه $ABCD$
منه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\,\overrightarrow{MG}$
نتيجة :
$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD})=0$ يكافئ $4\,\overrightarrow{MG}\,.\,\vec{u}=0$
يكافئ $\overrightarrow{MG}\,.\,\vec{u}=0$
إذن : (P) هو المستوي الذي يشمل النقطة G و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

التمرين – 31

A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء
ليكن G مرجح الجملة $\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\}$ حيث $a+b\neq 0$
و ليكن K مرجح الجملة $\{(A\,;1/a)\,;(B\,;1/b)\}$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$
نضع I منتصف $[AB]$
1 – برر وجود النقطة K
2 – بين أن I هي منتصف $[GK]$
3 – أحسب GK بدلالة AB
4 – عين الشرط على a و b حتى يكون $GK>AB$

الحـل – 31

1 – $a\neq 0$ و $b\neq 0$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a\,b}$ إذن : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq 0$ لأن $a+b\neq 0$
منه : النقطة K موجودة (مجموع المعاملات غير معدوم)
2 – G مرجح الجملة $\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\}$ إذن : من أجل كل نقطة M فإن :
$a\,\overrightarrow{MA}+b\,\overrightarrow{MB}=(a+b)\,\overrightarrow{MG}$ إذن :
لما M تنطبق على I فإن : $a\,\overrightarrow{IA}+b\,\overrightarrow{IB}=(a+b)\,\overrightarrow{IG}$

لكن I منتصف $[AB]$ إذن : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$ منه $a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{AI} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$

أي $a\,\overrightarrow{IA} - b\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$

أي $(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$ .... (1)

من جهة أخرى K هو مرجح الجملة $\{(A\,;1/a)\,;(B\,;1/b)\}$ إذن : من أجل كل نقطة M

فإن $\frac{1}{a}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MK}$

إذن : من أجل M تنطبق على I : $\frac{1}{a}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{IB} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{IK}$

أي : $\frac{1}{a}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{IB} = \frac{a+b}{ab}\overrightarrow{IK}$

منه : $\overrightarrow{IA} + \frac{a}{b}\overrightarrow{IB} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

لكن $\overrightarrow{IB} = -\,\overrightarrow{IA}$

منه : $\overrightarrow{IA} - \frac{a}{b}\overrightarrow{IA} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

أي $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\overrightarrow{IA} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

أي $\frac{b-a}{b}\overrightarrow{IA} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

أي $(b-a)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IK}$ .... (2)

نتيجة : من العلاقتين (1) و (2) لدينا :

$$\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\ (b-a)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IK}\end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\ -(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IK}\end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\ (a-b)\,\overrightarrow{IA} = -(a+b)\,\overrightarrow{IK}\end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\ (a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{KI}\end{cases}$$

يكافئ $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{KI}$

يكافئ I منتصف $[KG]$

3 ــ من المساواة (1) لدينا : $(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$

منه : $\frac{a-b}{a+b}\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IG}$ (لأن $a+b \neq 0$)

إذن : $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| IA = IG$

منه : $2\left|\frac{a-b}{a+b}\right| IA = 2\,IG$

أي : $2\left|\frac{a-b}{a+b}\right| \times \frac{AB}{2} = 2\,IG$ لأن $IA = \frac{AB}{2}$

منه : $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| AB = 2\,IG$

نتيجة : $KG = \left|\frac{a-b}{a+b}\right| \times AB$ لأن $2\,IG = KG$

5 ــ $GK > AB$ يكافئ $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| AB > AB$

يكافئ $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| > 1$ و هو الشرط الذي يحققه العددان a و b

التمرين ــ 32

ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين حيث AB = AC = a . m وسيط حقيقي .

1 ــ ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة $\{(A ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; m)\}$ مرجحا G_m .

2 ــ تحقق أن $G_0G_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

3 ــ عين المجموعة (Γ_1) من النقط M حيث $\|-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\| = \|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\|$

4 ــ عين المجموعة (Γ_2) من النقط M حيث $\|-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\| = AB$

الحـل ــ 32

1 ــ الجملة تقبل مرجح إذا و فقط إذا كان $-1+2+m \neq 0$ أي $m \neq -1$

2 ــ من أجل $m = 0$: $-\vec{AG_0}+2\vec{BG_0}=\vec{0}$ ...... (1)

من أجل $m = 1$: (2)....... $-\vec{AG_1}+2\vec{BG_1}+\vec{CG_1}=\vec{0}$

بطرح (1) من (2) : $-\vec{AG_1}+2\vec{BG_1}+\vec{CG_1}+\vec{AG_0}-2\vec{BG_0}=\vec{0}$

أي : $\vec{G_1A}+2\vec{BG_1}+\vec{CG_1}+\vec{AG_0}+2\vec{G_0B}=\vec{0}$

أي : $\vec{CG_1}+\vec{G_1A}+\vec{AG_0}+2(\vec{G_0B}+\vec{BG_1})=\vec{0}$

أي : $\vec{CA}+\vec{AG_0}+2\vec{G_0G_1}=\vec{0}$

أي : $\vec{CG_0}+2\vec{G_0G_1}=\vec{0}$

أي : $\vec{CG_0}=-2\vec{G_0G_1}$

أي : $\vec{CG_0}=2\vec{G_1G_0}$

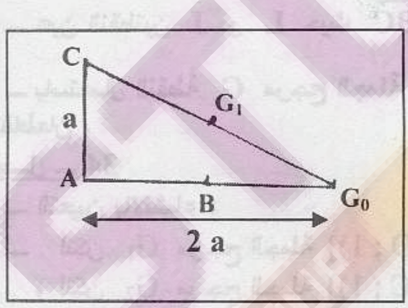
منه : G1 هي منتصف $[CG_0]$

لنبحث عن موضع G_0 :

لدينا : $-\vec{AG_0}+2\vec{BG_0}=\vec{0}$ منه $\vec{AG_0}=2\vec{BG_0}$

منه : G_0 هي نظيرة A بالنسبة إلى B

الانشاء :



البحث عن G_0G_1 :

$G_0G_1 = \frac{1}{2}\, CG_0$

في المثلث القائم ACG_0 لدينا : $CA^2+AG_0^2=CG_0^2$

منه : $a^2+(2a)^2=CG_0^2$

أي $5a^2=CG_0^2$

أي $CG_0=a\sqrt{5}$

إذن : $G_0G_1=\frac{1}{2}\, CG_0=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

3 ــ لتكن G مركز ثقل المثلث ABC إذن : $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MG}$

نتيجة :

$\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\| = \|-\vec{MA}+2\vec{MB}+2\vec{MC}\|$ يكافئ $\|3\vec{MG_2}\| = \|3\vec{MG}\|$

يكافئ $\|\vec{MG_2}\| = \|\vec{MG}\|$

يكافئ M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GG_2]$

إذن : (Γ_1) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_2G]$

2 – $\| -\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \| = AB$ يكافئ $\| 3\,\overrightarrow{MG_2} \| = a$

يكافئ $3\,\| \overrightarrow{MG_2} \| = a$

يكافئ $\| \overrightarrow{MG_2} \| = a/3$

يكافئ M تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها G_2 و نصف قطرها $a/3$

التمرين – 33

A ، B ، C ، D نقط من الفضاء . G مرجح الجملة $\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\,;(D\,;d)\}$

حيث $a+b+c+d \neq 0$ و $a \neq 0$

ما هو مرجح الجملة $\{(A\,;-a-b-c-d)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\,;(D\,;d)\}$

الحـل – 33

$$a\,\overrightarrow{AG} + b\,\overrightarrow{BG} + c\,\overrightarrow{CG} + d\,\overrightarrow{DG} = \vec{0} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ليكن K مرجح الجملة $\{(A\,;-a-b-c-d)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\,;(D\,;d)\}$

إذن : $(-a-b-c-d)\,\overrightarrow{KA} + b\,\overrightarrow{KB} + c\,\overrightarrow{KC} + d\,\overrightarrow{KD} = \vec{0} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

بجمع (1) و (2) : $a\,\overrightarrow{AG} + (-a-b-c-d)\,\overrightarrow{KA} + b(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BG}) + c(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CG}) + d(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DG}) = \vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG} - a\,\overrightarrow{KA} - b\,\overrightarrow{KA} - c\,\overrightarrow{KA} - d\,\overrightarrow{KA} + b\,\overrightarrow{KG} + c\,\overrightarrow{KG} + d\,\overrightarrow{KG} = \vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG} + a\,\overrightarrow{AK} + b\,\overrightarrow{AK} + c\,\overrightarrow{AK} + d\,\overrightarrow{AK} + b\,\overrightarrow{KG} + c\,\overrightarrow{KG} + d\,\overrightarrow{KG} = \vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG} + a\,\overrightarrow{AK} + b(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG}) + c(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG}) + d(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG}) = \vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG} + a\,\overrightarrow{AK} + b\,\overrightarrow{AG} + c\,\overrightarrow{AG} + d\,\overrightarrow{AG} = \vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AK} + (a+b+c+d)\,\overrightarrow{AG} = \vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AK} = -(a+b+c+d)\,\overrightarrow{AG}$

أي : $\overrightarrow{AK} = \dfrac{-(a+b+c+d)}{a}\,\overrightarrow{AG}$ لأن $a \neq 0$

التمرين – 34

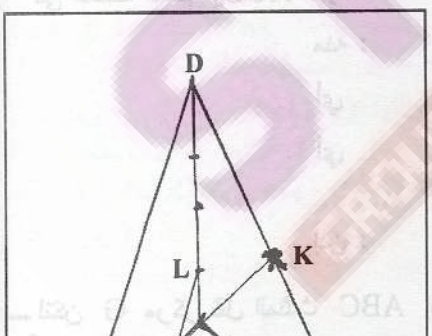
$ABCD$ رباعي وجوه . نسمي I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[CD]$

1 – عين النقطتين J و L حيث $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AD}$

2 – باستعمال النقطة G مرجح الجملة $\{(A\,;3)\,;(B\,;3)\,;(C\,;1)\,;(D\,;1)\}$ بين أن المستقيمين (JL) و (IK) متقاطعان .

الحـل – 34

1 – التعيين بالانشاء :



2 – لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(A\,;3)\,;(D\,;1)\}$

و لتكن G_2 مرجح الجملة $\{(B\,;3)\,;(C\,;1)\}$

إذن : G هو مرجح الجملة $\{(G_1\,;4)\,;(G_2\,;4)\}$

أي G هي منصف $[G_1G_2]$

لدينا : $3\,\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{DG_1} = \vec{0}$

إذن : $3\,\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG_1} = \vec{0}$

إذن : $4\,\overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{DA}$

أي $4\,\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AD}$

منه : $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AD}$ لكن $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AD}$

إذن : G_1 تنطبق على L

لدينا أيضا : $3\,\overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_2} = \vec{0}$

أي : $3\,\overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG_2} = \vec{0}$

أي $4\,\overrightarrow{BG_2} = -\,\overrightarrow{CB}$

أي $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$ لكن $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$

إذن : G_2 تنطبق على J

نتيجة : G هي منتصف [JL]

من جهة أخرى : لتكن K_1 مرجح الجملة $\{(A\,;3)\,;(B\,;3)\}$ إذن : K_1 منتصف [AB]

منه : K_1 تنطبق على I

و لتكن K_2 مرجح الجملة $\{(C\,;1)\,;(D\,;1)\}$ إذن : K_2 منتصف [CD]

منه : K_2 تنطبق على K

G هي مرجح للجملة $\{(K_1\,;4)\,;(K_2\,;4)\}$ إذن : G هي منتصف $[K_1K_2]$

أي G هي منتصف [IK]

خلاصة : $\left.\begin{array}{l}\text{G منتصف [JL]}\\ \text{G منتصف [IK]}\end{array}\right\}$ إذن : (JL) و (IK) متقاطعان في النقطة G

التمرين ـــ 35

ABCD رباعي من المستوي . I منتصف [AC] ، J منتصف [BD]

K نقطة حيث $\overrightarrow{KA} = -2\,\overrightarrow{KB}$

L نقطة حيث $\overrightarrow{LC} = -2\,\overrightarrow{LD}$ و M منتصف [LK]

G مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(B\,;2)\,;(C\,;1)\,;(D\,;2)\}$

1 ـ بين أن G ينتمي إلى المستقيمين (IJ) و (KL)

2 ـ بين أن G منطبقة على M و أن M ، I ، J على استقامة واحدة . ثم حدد وضعيتها بالنسبة إلى [IJ]

الحـل ـــ 35

1 ـ لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(C\,;1)\}$ إذن : G_1 منتصف [AC]

منه : G_1 تنطبق على I

لتكن G_2 مرجح الجملة $\{(B\,;2)\,;(D\,;2)\}$ إذن : G_2 منتصف [BD]

منه : G_2 تنطبق على J

نتيجة : G هي مرجح الجملة $\{(G_1\,;2)\,;(G_2\,;4)\}$

منه : $2\,\overrightarrow{G_1G} + 4\,\overrightarrow{G_2G} = \vec{0}$

أي : $2\,\overrightarrow{IG} + 4\,\overrightarrow{JG} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{IG} + 2\,\overrightarrow{JG} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{IG} = -2\,\overrightarrow{JG}$

أي : $\overrightarrow{IG} \,/\!/\, \overrightarrow{JG}$

منه : النقط I ، J ، G على استقامة واحدة . أي $G \in (JI)$ .... (1)

من جهة أخرى :

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{KA} = -2\,\overrightarrow{KB}\\ \overrightarrow{LC} = -2\,\overrightarrow{LD}\end{array}\right\}$ منه : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{KA} + 2\,\overrightarrow{KB} = \vec{0}\\ \overrightarrow{LC} + 2\,\overrightarrow{LD} = \vec{0}\end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l}\text{K مرجح الجملة } \{(A\,;1)\,;(B\,;2)\}\\ \text{L مرجح الجملة } \{(C\,;1)\,;(D\,;2)\}\end{array}\right\}$

منه : $3\,\overrightarrow{KG} + 3\,\overrightarrow{LG} = \vec{0}$ لأن G هي مرجح الجملة $\{(K\,;3)\,;(L\,;3)\}$

أي : $\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{LG} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{KG} = -\,\overrightarrow{LG}$ .... (α)

أي : $\overrightarrow{KG} // \overrightarrow{LG}$

منه : G ، L ، K على استقامة واحدة .

أي $G \in (LG)$ ....(2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن G تنتمي إلى كل من المستقيمين (JI) و (KL)

من العلاقة (α) لدينا : $\overrightarrow{KG} = -\overrightarrow{LG}$

أي : $\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{GL}$

إذن : G هي منتصف [KL]

منه : G تتطابق على M

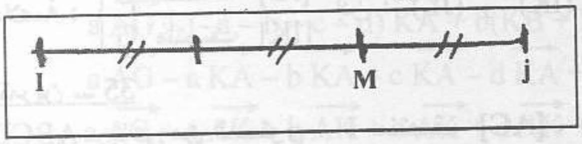
نتيجة : M ، I ، J على استقامة واحدة .

وضعية M بالنسبة إلى [IJ] :

لدينا : $\overrightarrow{IG} = -2\,\overrightarrow{JG}$ إذن : $\overrightarrow{IM} = -2\,\overrightarrow{JM}$

أي : $\overrightarrow{IM} = 2\,\overrightarrow{MJ}$

منه : M تنتمي إلى القطعة المستقيمة [IJ] حيث $MJ = \frac{1}{3}IJ$ كما يلي :



<u>التمرين – 36</u>

A ، B ، C ثلاث نقط متمايزة من الفضاء

G مرجح الجملة $\{(B ; -1) ; (C ; 2)\}$

F مرجح الجملة $\{(A ; -2) ; (B ; 2) ; (C ; -4)\}$

1 – بين أن F هي مرجح جملة نقطتين مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما

2 – عين المجموعة (E_1) من النقط M حيث $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\| = AG$

3 – تحقق أن A و G تنتميان إلى (E_1)

4 – عين المجموعة (E_2) من النقط M حيث $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF}\|$

<u>الحـل – 36</u>

1 – لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(B ; 2) ; (C ; -4)\}$

من خواص المرجح أنه لا يتغير إذا ضربنا كل معاملات الجملة **في نفس العدد الحقيقي غير المعدوم**

إذن : G_1 هو مرجح الجملة $\{(B ; 2(-1/2)) ; (C ; -4(-1/2))\}$

أي : G_1 هو مرجح الجملة $\{(B ; -1) ; (C ; 2)\}$

أي : G1 ينطبق على G

منه : F هو مرجح الجملة $\{(G ; 2-4) ; (A ; -2)\}$

أي F هو مرجح الجملة $\{(G ; -2) ; (A ; -2)\}$

نتيجة : F هو منتصف القطعة [GA]

2 – F هو مرجح الجملة $\{(A ; -2) ; (B ; 2) ; (C ; -4)\}$

إذن : F هو مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; -1) ; (C ; 2)\}$ (جداء المعاملات في (-1/2))

منه : $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MF}$

إذن : $\|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\| = AG$ يكافئ $\|2\,\overrightarrow{MF}\| = AG$

يكافئ $\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2}AG$

يكافئ M تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها F

و نصف قطرها $\frac{1}{2}AG$

نتيجة : (E_1) هو سطح الكرة ذات المركز F و نصف القطر $\frac{AG}{2}$

3 ـ F هي منتصف $[AG]$ إذن $[AG]$ هو قطر لسطح الكرة (E_1)

منه : A و G تنتميان إلى (E_1)

4 ـ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} = 2\,\overrightarrow{MF}$ لأن F منتصف $[AG]$

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FM}$

$= \overrightarrow{FA}$

نتيجة : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF}\|$ يكافئ $\|2\,\overrightarrow{MF}\| = \|\overrightarrow{FA}\|$

يكافئ $\|\overrightarrow{MF}\| = \dfrac{1}{2}\,\|\overrightarrow{FA}\|$

يكافئ M تنتمي إلى سطح الكرة ذات المركز F و نصف القطر $\dfrac{FA}{2}$

إذن : (E_2) هو سطح الكرة التي مركزها F و نصف قطرها $\dfrac{FA}{2} = \dfrac{AG}{4}$

التمرين ــ 37

لتكن النقط $A(1\,;-1\,;1)$ ؛ $B(2\,;0\,;1)$ و $C(-3\,;1\,;0)$

1 ــ تحقق أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى المستوي (π) الذي معادلته $x - y - 6z + 4 = 0$

2 ــ علل وجود ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حتى تكون النقطة $D(3\,;1\,;1)$ مرجح الجملة

$\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\}$

الحل ــ 37

1 ــ $1-(-1)-6(1)+4 = 6-6 = 0$ إذن : $A \in (\pi)$

$2-(0)-6(1)+4 = 6-6 = 0$ إذن : $B \in (\pi)$

$-3-(1)-6(0)+4 = 4-4 = 0$ إذن : $C \in (\pi)$

2 ــ لتكن D مرجح الجملة $\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\}$

نفرض أن $a+b+c \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{a+2b-3c}{a+b+c} = 3 \\ \dfrac{-a+c}{a+b+c} = 1 \\ \dfrac{a+b}{a+b+c} = 1 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} a+2b-3c = 3a+3b+3c \\ -a+c = a+b+c \\ a+b = a+b+c \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} -2a-b-6c = 0 \\ -2a-b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} -2a-b = 0 \\ -2a-b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases}$$

من أجل $a = 1$ فإن : $(a\,;b\,;c) = (1\,;-2\,;0)$

هل $D \in (\pi)$ ؟ $3-1-6+4 = 6-6 = 0$

إذن : $D \in (\pi)$

منه : D مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(B\,;-2)\,;(C\,;0)\}$

التمرين ــ 38

في المعلم $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ نعتبر القطع المكافئ ذو المعادلة $y = x^2$

1 ــ أكتب معادلة المماس (T_a) لــ (P) عند النقطة A ذات الفاصلة a حيث a عدد حقيقي غير معدوم .

2 ــ ما هو معامل توجيه مستقيم عمودي على (T_a) ؟

3 ــ استنتج أن مماس (P) العمودي على (T_a) هو مماس في النقطة 'A ذات الفاصلة $\left(\dfrac{1}{-4a}\right)$

4 ــ عين معادلة لمماس (P) عند النقطة 'A

الحـل ـ 38

1 ـ ليكن (P) منحنى الدالة f المعرفة على R^* بـ $f(x) = x^2$

إذن : $f'(x) = 2x$

منه : معادلة مماس المنحنى (P) عند النقطة A ذات الفاصلة a تكتب :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ أي $y = 2a(x-a) + a^2$

أي : $y = 2ax - a^2$ و هي معادلة المماس (T_a)

2 ـ الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمماس (T_a)

ليكن $\vec{v}\begin{pmatrix}2a\\-1\end{pmatrix}$

إذن : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2a + 2a = 0$

إذن : الشعاع $\vec{v}$ عمودي على المماس (T_a)

إذن : معامل توجيه المستقيم العمودي على (T_a) هو $\dfrac{-1}{2a}$

3 ـ المماس (T') للمنحنى (P) و العمودي على (T_a) له معامل التوجيه $\dfrac{-1}{2a}$

أي : $f'(x) = \dfrac{-1}{2a}$

منه : $2x = \dfrac{-1}{2a}$

أي : $4ax = -1$

منه : $x = \dfrac{-1}{4a}$

أي : فاصلة نقطة تماس (T') و المنحنى (P) هي $\dfrac{-1}{4a}$

4 ـ لدينا : $A'\left(\dfrac{-1}{4a} ; \dfrac{1}{16a^2}\right)$

منه : معادلة (T') :

$$y = f'\left(\frac{-1}{4a}\right)\left(x + \frac{1}{4a}\right) + f\left(\frac{-1}{4a}\right)$$

أي : $$y = \frac{-1}{2a}\left(x + \frac{1}{4a}\right) + \frac{1}{16a^2}$$

أي : $$y = \frac{-1}{2a}x - \frac{1}{8a^2} + \frac{1}{16a^2}$$

أي : $$y = \frac{-1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$$

التمرين ـ 39

ABCDIJKL مكعب في الفضاء . المنسوب إلى المعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AI})$

ليكن G مركز ثقل المثلث IBK .

1 ـ عين احداثيات G

2 ـ تحقق أن G تنتمي إلى المستقيم (JD)

3 ـ تحقق أن $\overrightarrow{JD}$ عمودي على $\overrightarrow{BK}$ و $\overrightarrow{BI}$. ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BIK)

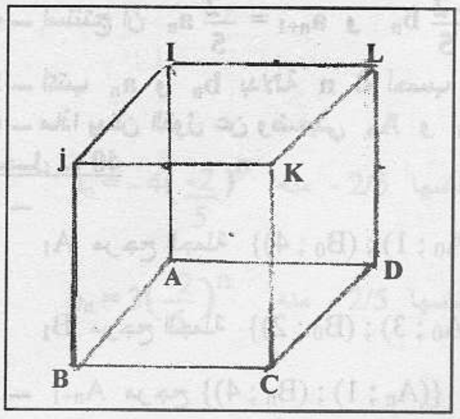
الحـل ـ 39

الانشاء : في المعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AI})$ لدينا احداثيات النقط كما يلي :

$A(0;0;0)$ ، $B(1;0;0)$ ، $I(0;0;1)$ ، $K(1;1;1)$ ، $J(1;0;1)$ ، $D(0;1;0)$

1 ـ G مركز ثقل المثلث IBK إذن : G مرجح الجملة $\{(I;1);(B;1);(K;1)\}$

منه : احداثيات G هي : $\left(\dfrac{1+1+0}{3} ; \dfrac{0+0+1}{3} ; \dfrac{0+1+1}{3}\right)$



أي $G\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

2 – $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix} 1-\frac{2}{3} \\ 0-\frac{1}{3} \\ 1-\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix} 0-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{1}{3} \\ 0-\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{1/3}{-2/3} = -\frac{1}{2}$; $\frac{-1/3}{2/3} = -\frac{1}{2}$; $\frac{1/3}{-2/3} = -\frac{1}{2}$

إذن : $\overrightarrow{GJ} // \overrightarrow{GD}$

منه : النقط G ، J ، D على استقامة واحدة .

أي $G \in (JD)$

2 – $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

نتيجة : $\overrightarrow{JD} . \overrightarrow{BK} = -1(0) + 1(1) - 1(1) = 0$ إذن : $\overrightarrow{JD} \perp \overrightarrow{BK}$

$\overrightarrow{JD} . \overrightarrow{BI} = -1(-1) + 1(0) - 1(1) = 0$ إذن : $\overrightarrow{JD} \perp \overrightarrow{BI}$

إذن : الشعاع $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (BKI)

أي : المستوي (BKI) له المعادلة $-x + y - z + \alpha = 0$ حيث $\alpha \in IR$

$B \in (BKI)$ إذن : $-1 + 0 - 0 + \alpha = 0$

أي $\alpha = 1$

منه : $-x + y - z + 1 = 0$ هي معادلة المستوي (BKI)

التمرين – 40

ليكن (Δ) مستقيم مزود بمعلم $(o ; \vec{i})$. A_0 ، B_0 نقطتان من (Δ) فاصلتاهما على الترتيب (-4) و $(+3)$

لكل عدد طبيعي n نضع $\begin{cases} A_{n+1} \text{ مرجح الجملة } \{(A_n ; 1) ; (B_n ; 4)\} \\ B_{n+1} \text{ مرجح الجملة } \{(A_n ; 3) ; (B_n ; 2)\} \end{cases}$

1 – علم A_0 ، B_0 ، A_1 ، B_1

2 – ليكن a_n ، b_n فواصل النقطتين A_n و B_n على الترتيب .

عبر عن a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n

3 – بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $3 a_n + 4 b_n = 0$

4 ــ استنتج أن $a_{n+1} = \frac{-2}{5} a_n$ و $b_{n+1} = \frac{-2}{5} b_n$

5 ــ أكتب a_n و b_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

6 ــ ماذا يمكن القول عن وضعيتي A_n و B_n ؟

الحل ــ 40

ــ 1

A_1 مرجح الجملة $\{(A_0 ; 1) ; (B_0 ; 4)\}$ إذن : فاصلة A_1 : $\frac{-4+3(4)}{4+1} = \frac{8}{5}$

B_1 مرجح الجملة $\{(A_0 ; 3) ; (B_0 ; 2)\}$ إذن : فاصلة B_1 : $\frac{-4(3)+3(2)}{4+1} = \frac{-6}{5}$

2 ــ A_{n+1} مرجح $\{(A_n ; 1) ; (B_n ; 4)\}$ منه : $a_{n+1} = \frac{a_n + 4 b_n}{5}$

B_{n+1} مرجح $\{(A_n ; 3) ; (B_n ; 2)\}$ منه : $b_{n+1} = \frac{3a_n + 2 b_n}{5}$

3 ــ البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $3 a_n + 4 b_n = 0$

من أجل $n = 0$: $3 a_0 + 4 b_0 = 3(-4) + 4(3) = 0$

إذن : الخاصية محققة .

من أجل $n = 1$: $3 a_1 + 4 b_1 = 3\left(\frac{8}{5}\right) + 4\left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{24}{5} - \frac{24}{5} = 0$

إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن : $3 a_n + 4 b_n = 0$ من أجل $n > 1$

هل $3 a_{n+1} + 4 b_{n+1} = 0$ ؟

$$3 a_{n+1} + 4 b_{n+1} = 3\left(\frac{a_n + 4 b_n}{5}\right) + 4\left(\frac{3a_n + 2 b_n}{5}\right)$$

$$= \frac{3 a_n + 12 b_n + 12 a_n + 8 b_n}{5}$$

$$= \frac{15 a_n + 20 b_n}{5}$$

$$= \frac{5(3 a_n + 4 b_n)}{5}$$

$= 0$ لأن حسب فرضية التراجع $3 a_n + 4 b_n = 0$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3 a_n + 4 b_n = 0$

4 ــ $3 a_n + 4 b_n = 0$ إذن : $3 a_n = -4 b_n$

منه : $\left.\begin{array}{l} (1) \ldots\ldots a_n = \frac{-4}{3} b_n \\ (2) \ldots\ldots b_n = \frac{-3}{4} a_n \end{array}\right\}$

لدينا : $\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{a_n + 4 b_n}{5} \\ b_n = \frac{-3}{4} a_n \end{array}\right\}$ منه : $a_{n+1} = \frac{a_n + 4\left(\frac{-3}{4} a_n\right)}{5}$

أي : $a_{n+1} = \frac{a_n - 3 a_n}{5} = \frac{-2}{5} a_n$

و $\left.\begin{array}{l} b_{n+1} = \frac{3a_n + 2 b_n}{5} \\ a_n = \frac{-4}{3} b_n \end{array}\right\}$ منه : $b_{n+1} = \frac{3\left(\frac{-4}{3} b_n\right) + 2 b_n}{5}$

أي : $b_{n+1} = \frac{-4 b_n + 2 b_n}{5} = \frac{-2}{5} b_n$

نتيجة : $\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{-2}{5}\,a_n \\ b_{n+1} &= \frac{-2}{5}\,b_n \end{aligned}\right\}$

5 – $\left.\begin{aligned} a_0 &= -4 \\ a_{n+1} &= \frac{-2}{5}\,a_n \end{aligned}\right\}$ إذن : (a_n) متتالية هندسية حدها الأول $a_0 = -4$ و أساسها $-2/5$ منه $a_n = -4\left(\frac{-2}{5}\right)^n$

$\left.\begin{aligned} b_0 &= 3 \\ b_{n+1} &= \frac{-2}{5}\,b_n \end{aligned}\right\}$ إذن : (b_n) متتالية هندسية حدها الأول $b_0 = 3$ و أساسها $-2/5$ منه $b_n = 3\left(\frac{-2}{5}\right)^n$

نتيجة : $\left.\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} -4\left(\frac{-2}{5}\right)^n = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} b_n &= \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{-2}{5}\right)^n = 0 \end{aligned}\right\}$

6 – لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن فاصلة A_n تؤول إلى 0 إذن : A_n تقترب من النقطة 0 مبدأ المعلم .
لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن فاصلة B_n تؤول إلى 0 إذن : B_n تقترب من النقطة 0 مبدأ المعلم .

التمرين – 41

A ، B ، C نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء

H مركز ثقل المثلث ABC

G مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 1)\}$

1 – بين أن B ؛ G ؛ H على استقامة واحدة .

2 – عين المجموعة (E) من النقط حيث : $3\,\|\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\,\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

3 – لتكن M نقطة من المستوي .

نضع : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC}$

أ) بين أن $\vec{v}$ مستقل عن النقطة M

ب) بين أن النقطة C تحقق : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

ج) عين مجموعة النقط (E') التي تحقق : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

الحـل – 41

1 – H مركز ثقل المثلث ABC إذن : H مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 1) ; (C ; 1)\}$

ليكن K مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (C ; 1)\}$ إذن : K منتصف [AC]

منه : H هي مرجح الجملة $\{(K ; 2) ; (B ; 1)\}$ منه $H \in (BK)$

من جهة أخرى G مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 1)\}$

إذن : G مرجح الجملة $\{(K ; 2) ; (B ; 1)\}$ منه $G \in (BK)$

خلاصة : $\left.\begin{aligned} H \in (BK) \\ G \in (BK) \end{aligned}\right\}$ إذن : H ، G ، B على استقامة واحدة .

2 – $3\,\|\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\,\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ يكافئ $3\,\|4\,\overrightarrow{MG}\| = 4\,\|3\,\overrightarrow{MH}\|$

يكافئ $12\,MG = 12\,MH$

يكافئ $MG = MH$

يكافئ M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [GH]

3 – $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC}$

أ) لتكن الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -3)\}$

مجموع المعاملات $1 + 2 - 3 = 0$ إذن : الجملة لا تقبل مرجحا .

إذن : الشعاع $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC}$ مستقل تماما عن اختيار النقطة M

ب) لتكن M تنطبق على C

إذن : $\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\overrightarrow{CA}+2\,\overrightarrow{CB}\\ \vec{u}=\overrightarrow{CA}+2\,\overrightarrow{CB}\end{array}\right\}$

منه : $\vec{u}=\vec{v}$ إذن : $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

ج) $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

يكافئ $\|4\,\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{CA}+2\,\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $4\,MG=\|\overrightarrow{CA}+2\,\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $MG=\frac{1}{4}\|\overrightarrow{CA}+2\,\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز G و نصف القطر $\frac{1}{4}\|\overrightarrow{CA}+2\,\overrightarrow{CB}\|$

بما أن C تحقق $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ فإن C تنتمي إلى هذه الدائرة .

و عليه فالمجموعة (E') هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها GC (أي تشمل C)

التمرين ـ 42

A ، B ، C ، D نقط متمايزة من الفضاء .

I مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(B\,;-2)\,;(C\,;-3)\}$

J مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(C\,;-3)\,;(D\,;4)\}$

K مرجح الجملة $\{(1\,;A)\,;(B\,;-2)\,;(D\,;4)\}$

1 ـ بين أن الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{MA}-2\,\overrightarrow{MB}-3\,\overrightarrow{MC}+4\,\overrightarrow{MD}$ مستقيل عن النقطة M

2 ـ بين أن المستقيمات (DI) ، (JB) ، (CK) متوازية

الحـل ـ 42

1 ـ لتكن الجملة $S=\{(A\,;1)\,;(B\,;-2)\,;(C\,;-3)\,;(D\,;4)\}$

الجملة S لا تقبل مرجحا لأن مجموع المعاملات معدوم .

منه : الشعاع $\vec{u}=\overrightarrow{MA}-2\,\overrightarrow{MB}-3\,\overrightarrow{MC}+4\,\overrightarrow{MD}$ مستقل عن النقطة M

2 ـ من أجل M تنطبق على I فإن : $\vec{u}=\overrightarrow{IA}-2\,\overrightarrow{IB}-3\,\overrightarrow{IC}+4\,\overrightarrow{ID}$

لكن : $\overrightarrow{IA}-2\,\overrightarrow{IB}-3\,\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ لأن I مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(B\,;-2)\,;(C\,;-3)\}$

إذن : $\vec{u}=4\,\overrightarrow{ID}$

منه : $\vec{u}\,//\,\overrightarrow{ID}$

من أجل M تنطبق على J فإن : $\vec{u}=\overrightarrow{JA}-2\,\overrightarrow{JB}-3\,\overrightarrow{JC}+4\,\overrightarrow{JD}$

لكن : $\overrightarrow{JA}-3\,\overrightarrow{JC}+4\,\overrightarrow{JD}=\vec{0}$ لأن J مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(C\,;-3)\,;(D\,;4)\}$

إذن : $\vec{u}=-2\,\overrightarrow{JB}$

منه : $\vec{u}\,//\,\overrightarrow{JB}$

من أجل M تنطبق على K فإن : $\vec{u}=\overrightarrow{KA}-2\,\overrightarrow{KB}-3\,\overrightarrow{KC}+4\,\overrightarrow{KD}$

لكن : $\overrightarrow{KA}-2\,\overrightarrow{KB}+4\,\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ لأن K مرجح الجملة $\{(A\,;1)\,;(B\,;-2)\,;(D\,;4)\}$

إذن : $\vec{u}=-3\,\overrightarrow{KC}$

منه : $\vec{u}\,//\,\overrightarrow{KC}$

نتيجة : كل من المستقيمات (DI) و (JB) و (CK) لها نفس شعاع التوجيه $\vec{u}$

إذن : فهي متوازية مثنى مثنى .