الثـــانية علوم تجريبية	الأعـــــداد العقديـــــة	ح . بوعــــيـــون

تمرين1

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين:

$(1-i)z-3i\bar{z}=1+4i$ و $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18i$

تمرين2

ليكن a و b من $\mathbb{C}$ بحيث $a\neq b$ و $|a|=|b|=1$

بين أن : $(\forall z\in\mathbb{C}):\dfrac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\in i\mathbb{R}$.

تمرين 3

نعتبر العدد $u=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ حيث z عدد عقدي ينتمي إلى $\mathbb{C}-\left\{-\frac{i}{2}\right\}$

بين أن $|u|=1\Leftrightarrow|z|=1$.

تمرين4

حدد المجموعتين :

$E=\{M(z)\ /\ |2z+1-i|=2\}$ و $F=\{M(z)/|z-1+i|=|z+1+2i|\}$

تمرين5

ليكن z عدد عقدي $(z\neq-1)$, M صورة العدد z في المستوى العقدي . نضع $u=\dfrac{z(1+i)-i}{z+1}$.

1) حدد مجموعة النقط M التي يكون من أجلها u عددا حقيقيا.

2) " " " " " " " " " تخيليا صرفا .

3) " " " " " " " " " $|u|=\sqrt{2}$

تمرين6

نعتبر في المستوى العقدي النقط A وM وM' صور الأعداد العقدية i و z و iz على التوالي .

حدد مجموعة النقط M التي تكون من أجلها النقط A و M و M' مستقيمية

تمرين7

نعتبر الأعداد $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=1-i$ و $z=\dfrac{z_1}{z_2}$

أحسب معيار وعمدة الأعداد z_1 و z_2 و z واستنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$

تمرين8

1) نعتبر النقط $A(1+3i)$ و $B(3+i)$ و $C(1-i)$ حدد طبيعة المثلث (ABC) .

2) نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ بحيث a و b و c مختلفة و تحقق

$(c-b)=(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(a-c)$

بين أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع .

تمرين9

حدد المجموعتين

$E=\left\{M(z)/\arg(z-i)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$ و $F=\left\{M(z)/\arg(z-1-i)^2\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$

تمرين10

لكل عدد عقدي $z \neq i$ نضع $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{1-i\bar{z}}$

1) a) بين أن : $f(z)\in IR \Leftrightarrow |z|^2-\mathrm{Im}(z)=0$

b) حدد المجموعة $E=\{M(z)\in P \,/\, f(z)\in IR\}$

2) حدد المجموعة $F=\{M(z)\in P \,/\, f(z)\in iIR\}$

3) نعتبر النقط $A(i)$ و $M(z)$ و $M'(f(z))$

a) بين أن : $f(z)-i=\dfrac{1}{|1-i\bar{z}|^2}(z-i)$

b) استنتج قياسا للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}})$.

تمرين11

ليكن $\theta\in[0,2\pi]$ و $\alpha\in]0,\pi[$ أحسب معيار وعمدة كل من الأعداد

$z_1=1+\sin\theta+i\cos\theta$ و $z_2=\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha-i}{\cos\alpha+i\sin\alpha+i}$

تمرين12

نعتبر العددين : $a=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ و $b=\dfrac{\sqrt{3}-i}{4}$.

1) اكتب a و b على الشكل المثلثي.

2) استنتج معيار وعمدة كل من العددين : $z_1=a+b$ و $z_2=a-b$

تمرين13

1) حدد الجذور المكعبة لكل من العددين -1 و i

2) استنتج حلول المعادلة : $z^6+(1-i)z^3-i=0$

تمرين14

احسب $(2+i)^3$ واستنتج الجذور من الرتبة 3 لـ : $2+11i$

تمرين15

نعتبر المعادلة : $(E): z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)=0$

1) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

تمرين16

نعتبر المعادلة : (E) : $z^4-z^3+2z^2-z+1=0$

1) بين انه إذا كان α حلا للمعادلة فان $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة .

2) تحقق أن $z_0=i$ حل للمعادلة ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

تمرين17

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+(1+2i\sqrt{3})z-3=0$

واكتب حليها z_1 و z_2 على الشكل المثلثي $(|z_1|<|z_2|)$.

2) لتكن $A(z_1)$ و $B(z_2)$ حدد لحق النقطة C بحيث يكون المثلث (ABC) متساوي الساقين في A و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

تمرين18

نعتبر العدد : $z=5(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}})$

1) أحسب z^2 وأكتب z^2 على الشكل المثلثي .

2) حدد معيار z و arg(z) .

تمرين19

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2-2(\sqrt{3}-i)z+2(3-i\sqrt{3})=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2) نعتبر العددين $u=\sqrt{3}+i$ و $v=\sqrt{3}-3i$

حدد الشكل المثلثي لكل من u و v ثم أحسب $(\frac{u}{2})^{2000}$

3) نضع $w=\frac{\sqrt{3}u}{v}$ (a حدد الشكل المثلثي للعدد w .

b) حدد حسب قيم العدد النسبي n الشكل الجبري للعدد $(w)^n$

4) نعتبر النقط $A(u)$ و $B(-u)$ و $C(v)$ و $D(\overline{v})$.

a) حدد الشكل الجبري ل $\frac{u-\overline{v}}{u-v}$ واستنتج أن A و C و D مستقيمية .

b) تحقق أن : $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{v-u}{v+u}$ واستنتج طبيعة (ABC)

تمرين20

1) a) اكتب على الشكل المثلثي العددين $a=\frac{1+i}{2}$ و $b=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

b) حدد الأعداد النسبية n التي يكون من أجلها $(ab)^n\in iIR$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2+(-1+2i)z-i=0$

3) ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة بحيث $\text{Im}(z_1)<\text{Im}(z_2)$

a) بين أن $az_1=(\frac{1+\sqrt{3}}{2})\cdot b$ (b استنتج الشكل المثلثي للعدد z_1 .

c) أكتب $z_1.z_2$ على الشكل المثلثي واستنتج الشكل المثلثي لـz_2

4) نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $z'=az$ و $z\in\mathbb{C}$.

بين أن المثلث (OMM′) متساوي الساقين وقائم الزاوية في M′

تمرين21

ليكن u عدد عقدي ونعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_u): z^2-(2u-i\overline{u})z-2i|u|^2=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_u) .

2) نضع $z'=2u$ و $z''=-i\overline{u}$ ونعتبر النقط $A(\frac{\overline{z}'}{2})$ و $B(z'')$ و $C(\frac{\overline{z}'+2z''}{2})$

بين أن الرباعي $(OACB)$ مربع .

تمرين22

لكل عدد عقدي $z \neq 1$ نضع $f(z)=\frac{iz^2}{z-1}$

1) حدد المجموعة $E=\{M(z)\in P \,/\, f(z)\in iIR^*\}$

2) a) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\bar{z}^3=-1$

b) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(\frac{1}{z})=-\overline{f(z)}$

3) a) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $\sqrt{3}f(z)=1$ وأكتب الحلين z' و z'' على الشكل المثلثي $(|z'|=1))$.

b) أحسب z'^{2001}

c) نعتبر النقط $A(1)$ $B(z')$ و $C(z'')$ و $D(z'z'')$.

بين أن $CD=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$ وحدد القياس الرئيسي لـ $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$

d) ما هي طبيعة المثلث (OCD) ؟

5) نضع $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ مع $]-\pi,0[$

a) حدد معيار وعمدة $f(z)$.

b) حدد z بحيث يكون $(f(z))^3=|f(z)|^3$

تمرين23

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): az^2-i(a^4+1)z-a^3=0$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$

1) حدد قيم a التي يكون من أجلها للمعادلة (E) حلا وحيدا .

2) نفترض أن $a^4\neq 1$. a) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

b) أعط معيار وعمدة حلي المعادلة (E) بدلالة معيار وعمدة a .

c) حدد قيم a التي يكون من أجلها حلا المعادلة (E) متقابلين .

تمرين24

نعتبر المعادلة : (E) : $2z^2-2(\alpha+i)z+\alpha^2-1=0$ $\alpha\in IR_+^*-\{1\}$.

1) احسب $(1+i\alpha)^2$ ثم حل المعادلة (E) . ليكن z_1 z_2 حلي المعادلة (E) مع $\mathrm{Re}(z_1)<\mathrm{Re}(z_2)$.

2) اكتب z_1 z_2 على الشكل المثلثي .

3) نفترض أن $\alpha>1$ ونضع $Z=\frac{z_1}{z_2}$ أعط الشكل الجبري للأعداد : z^{4n} z^{4n+1} z^{4n+2} z^{4n+3} $(n\in IN)$ ثم احسب z^{1989} .

تمرين25

نعتبر التطبيق g من $\mathbb{C}-\{-1,1\}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي $g(z)=\frac{z}{1-z^2}$

1) تحقق أن $g(z)=\frac{z(1-\bar{z}^2)}{|1-z^2|^2}$: $(\forall z\in\mathbb{C}-\{-1,1\})$.

2) حدد طبيعة المجموعة : $E=\{M(z)\,/\,g(z)\in iIR\}$.

3) نضع $z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\theta\in]0,\pi[$

a) بين أن $g(z)=\frac{i}{2\sin\theta}$ وأن $zg(z)=\frac{1}{2\sin\theta}(\cos(\theta+\frac{\pi}{2})+i\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$

b) اكتب على الشكل الجبري العدد : $(z_0g(z_0))^6$ حيث $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

تمرين26

نعتبر المعادلة : $z^2-4z\sin\alpha+4=0\ (E)$ حيث $\alpha\in[-\pi,\pi]-\{0\}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) واحسب معيار وعمدة z_1 و z_2 حلي(E)

2) a) احسب $S=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ و $S=z_1^4+z_2^4$.

b) حدد قيمة α بحيث $S=0$.

تمرين27

ليكن $a\in IR_+^*-\{1\}$. نعتبر المعادلة : $2z^2+(a+1)(1-i\sqrt{3})z-a(1+i\sqrt{3})=0$

1) a) احسب $-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})^2$ ثم حل المعادلة (E) واكتب الحلين على الشكل المثلثي .

b) اكتب الجذور الرابعة لحلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي .

2) نعتبر النقط $A(ae^{i\frac{2\pi}{3}})$ ، $B(e^{i\frac{\pi}{6}})$ و $C(-e^{i\frac{\pi}{6}})$.

a) بين أن المثلث (ABC) متساوي الساقين في A .

b) حدد قيمة a التي يكون من أجلها $\overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

تمرين28

ليكن $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ حدد معيار وعمدة حلي المعادلة $z^2-2z+1+\cos(2\alpha)-i\sin(2\alpha)=0$.

تمرين29

نعتبر العدد : $z=5(\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}})$

1) أحسب z^2 وأكتب z^2 على الشكل المثلثي .

2) حدد معيار z و arg(z) .

3) ليكن $u=re^{i\theta}$ حيث $r>0$ و $\theta\in IR$

حدد وأنشئ المجموعات التالية :

$E=\{M(u)\in P\ /\ uz\in IR\}$ $\quad F=\{M(u)\in P\ /\ uz\in iIR\}$ $\quad G=\{M(u)\in P\ /\ 5\leq|uz|\leq 15\}$

تمرين30

1) نعتبر النقط $A(1+3i)$ و $B(3+i)$ و $C(1-i)$ حدد طبيعة المثلث (ABC) .

2) نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ بحيث a و b و c مختلفة و تحقق

: $(c-b)=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(a-c)$

بين أن المثلث (ABC) متساوي الأضلاع .

4) حدد المجموعة $E=\{M(z)\in P\ /\ f(z)\in IR\}$

تمرين31

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^{12}=1$ واكتب الحلول على الشكل المثلثي والجبري .

2) استنتج حلول المعادلة $z^8+z^4+1=0$