السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق المجموعات و التطبيقات	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1) بين أن : $\forall(a,b)\in\left(IR^{+}\right)^{2}\quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a>b$

2) بين بالترجع أن: $\forall n\in IN\quad \exists k\in Z\quad n^{3}-n+5^{2n}-1=6k$

3) ليكن a و b عددين حقيقين موجبين قطعا ، نضع: $x=a+\dfrac{1}{b}$ و $y=b+1$ و $z=1+\dfrac{1}{a}$

وليكن M أكبر الأعداد x و y و z ، بين أن : $M\geq 2$

4) مستعملا برهانا بفصل الحالات برهن أن: $\forall x\in IR\quad x^{6}-x+1>0$

5) بين أن : $\forall(x,y)\in IR^{2}\quad \left(x^{2}+y^{2}=x+y=2\Leftrightarrow x=y=1\right)$

6) إعط نفي العبارتين الوادتين في السؤال 1 و 2

تمرين 2 : لتكن E مجموعة غير فارغة و A و B و C أجزاء منها.

1) بسط : $A\cup(A\cap C)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)$ ، $(A\cup C)\setminus\overline{(C\setminus B)}$

2) بين أن: $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$

تمرين 3 : نعتبر المجموعة: $K=\left\{(a,b)\in IN^{*}\times IN^{*}\ /\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\right\}$

1) بين أن : $(a,b)\in K\Leftrightarrow (a-2)(b-2)=4$

2) اكتب المجموعة K بتفصيل

تمرين 4 : نعتبر التطبيق: $\begin{array}{l} f:IR\to IR \\ x\mapsto \dfrac{x}{1+|x|}\end{array}$

1) بين أن $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$ ثم استنتج أن f غير شمولي.

2) بين أن f تطبيق تبايني

3) بين أن: $f^{-1}\left(\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right)=[0;1]$

4) بين أن f تقابل من IR نحو $\left]-1;1\right[$ وحدد f^{-1} التطبيق العكسي لـ f

استعدادا لاجتياز فروضك	مبادئ في المنطق المجموعات و التطبيقات حل مقترح	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1

لدينا $\forall(a,b)\in(IR^+)^2 \quad a\le b \Rightarrow \begin{cases} a+1\le b+1 \\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a+1}\le\sqrt{b+1}\\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases} \Rightarrow \sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

بالتالي: $\forall(a,b)\in(IR^+)^2 \quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b} \Rightarrow a>b$

2

لدينا بالنسبة لـ $n=0$: $0^3-0+5^0-1=0=6\times 0$ (العبارة صحيحة)

نفترض أن : $\exists k\in Z \quad n^3-n+5^{2n}-1=6k$ و نبين أن : $\exists k'\in Z \quad (n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k'$

لدينا :

$$(n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=n^3+3n^2+3n^2+1-n-1+5^{2n+2}-1=n^3-n+3n(n+1)+5^{2n}\times 25-1$$

$$=6k-5^{2n}+1+3n(n+1)+25\times 5^{2n}-1$$

$$=6k+3n(n+1)+24\times 5^{2n}$$

و بما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جداء عددين متتابعين) فإن : $n(n+1)=2a \ / a\in IN$

منه : $(n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k+6a+24\times 5^{2n}=6(k+a+4\times 5^{2n})$

نضع : $k'=k+a+4\times 5^{2n}\in Z$ بالتالي : $\forall n\in IN \quad \exists k\in Z \quad n^3-n+5^{2n}-1=6k$

3

نفترض أن : $M<2$ ، إذن: $x<2$ و $y<2$ و $z<2$

منه:

$$\begin{cases}x<2\\ y<2\\ z<2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ b+1<2\\ 1+\frac{1}{a}<2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ b<1\\ \frac{1}{a}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ \frac{1}{b}>1\\ a>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ \frac{1}{b}+a>2\end{cases} \Rightarrow 2<a+\frac{1}{b}<2$$

وهذا غير ممكن إذن افتراضنا خاطئ و بالتالي العبارة المطلوبة صحيحة.

4

لدينا: $x^6-x+1=x(x^5-1)+1$ و $x^6-x+1=x^6+1-x$

- إذا كان : $x\ge 1$ ، فإن: $x\ge 1 \Rightarrow x^5\ge 1 \Rightarrow x^5-1\ge 0 \Rightarrow x(x^5-1)\ge 0 \Rightarrow x^6-x+1>0$
- إذا كان : $x<1$ ، فإن: $x<1 \Rightarrow \begin{cases}1-x>0\\ x^6=(x^3)^2\ge 0\end{cases} \Rightarrow x^6+1-x>0$

إذن في كل الحالات : $x^6-x+1>0$ ، بالتالي: $\forall x\in IR \ x^6-x+1>0$

5

لدينا : $x=y=1 \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2=1+1=2\\ x+y=1+1=2\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=x+y=2$

و

$$x^2+y^2=x+y=2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2(x+y)+2=2-4+2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-1=0\\ y-1=0\end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

بالتالي : $\forall(x,y)\in IR^2 \quad (x^2+y^2=x+y=2 \Leftrightarrow x=y=1)$

6

$\exists(a,b)\in\left(IR^{+}\right)^{2}\ \ \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$ et $a\le b$

$\exists n\in IN\ \ \exists\forall\in Z\ \ \ n^{3}-n+5^{2n}-1\neq 6k$

تمرين 2 :

▪ لدينا $A\cup(A\cap C)\cup(\overline{B}\cap A)=A$ (لأن: $A\cap C\subset A$ وأيضا : $\overline{B}\cap A\subset A$)

▪ لدينا: $(A\cup C)\setminus\overline{(C\setminus B)}=(A\cup C)\cap\overline{\overline{(C\setminus B)}}=(A\cup C)\cap(C\setminus B)=(A\cup C)\cap(C\cap\overline{B})=C\cap\overline{B}$

لأن: $C\cap\overline{B}\subset C\subset(A\cup C)$

إذا كانت مجموعة ضمن الأخرى يكون التقاطع هو المجموعة الأصغر و الاتحاد هو المجموعة الأكبر

تمرين 3 : نعتبر المجموعة: $K=\left\{(a,b)\in IN^{*}\times IN^{*}\ /\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\right\}$

1

$(a,b)\in K\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+2b=ab\Leftrightarrow 2a-ab+2b=0$

لدينا : $(a,b)\in K\Leftrightarrow a(2-b)+2b=0\Leftrightarrow a(2-b)+2b-4+4=0\Leftrightarrow a(2-b)+2(b-2)=-4$

$(a,b)\in K\Leftrightarrow(b-2)(-a+2)=-4\Leftrightarrow(b-2)(a-2)=4$

2

لدينا حسب السؤال السابق ، و بما أن قواسم 4 الموجبة هي 1 و 2 و 4 فإن:

$(a,b)\in K\Leftrightarrow(a-2,b-2)\in\{(1,4);(-1,-4);(2,2);(-2,-2)\}\Leftrightarrow(a,b)\in\{(3,6);(1,-2);(4,4);(0,0)\}$

بالتالي: $K=\{(3,6);\ (1,-2)\ ;\ (4,4)\}$ (لأن $(0;0)\notin K$)

تمرين 4 :

$$f:IR\to IR$$
$$x\mapsto\frac{x}{1+|x|}$$

1

لدينا: $\forall x\in IR\ 1-|f(x)|=1-\frac{|x|}{1+|x|}=\frac{1}{1+|x|}>0$ ، إذن: $\forall x\in IR\ |f(x)|<1$

منه: $\forall x\in IR\ \ f(x)\in]-1;1[$ بالتالي: $f(IR)\subset]-1;1[$

بما أن $2\notin]-1;1[$ و $f(IR)\subset]-1;1[$ فإن 2 لا سابق له بالتالي f ليس شمولا على IR

2

ليكن $(x;y)\in IR^{2}$ حيث $f(x)=f(y)$ إذن : $\frac{x}{1+|x|}=\frac{y}{1+|y|}$ نستنتج أن لـ x و y نفس الإشارة

إذا كانا موجبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}\Rightarrow x+xy=y+xy\Rightarrow x=y$

إذا كانا سالبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{x}{1-x}=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x-xy=y-xy\Rightarrow x=y$

بالتالي f تطبيق تبايني

3

$x\in f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)\Leftrightarrow f(x)\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{x}{1+|x|}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le 2x\le 1+|x|$

$x\in f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 0\\2x\le 1+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1\Leftrightarrow x\in[0;1]$

بالتالي : $f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)=[0;1]$

4	لدينا حسب السؤال الثاني f تباين على IR لنبين أنها شمول على $]-1;1[$ ، ليكن $y \in]-1;1[$ ، ولنحل المعادلة: $(E):\ f(x)=y\ ;x\in IR$ هذه المعادلة تكافئ: $\frac{x}{1+\|x\|}=y$ نستنتج منه أن لـ x و y نفس الإشارة إذا كان: $y\geq 0$ فإن: $x\geq 0$ منه: $(E):\Leftrightarrow \frac{x}{1+x}=y\Leftrightarrow x=y+xy\Leftrightarrow x-xy=y\Leftrightarrow x(1-y)=y\Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}\ (y\neq 1)$ إذا كان: $y<0$ فإن: $x<0$ منه: $(E):\Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=y\Leftrightarrow x=y-xy\Leftrightarrow x+xy=y\Leftrightarrow x(1+y)=y\Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}\ (y\neq -1)$ في كل الحالات المعادلة تقبل حلا في IR ، إذن ف f شمول على $]-1;1[$ وبالتالي فهي تقابل من IR نحو $]-1;1[$ وتقابلها العكسي معرف كما يلي: $f^{-1}:\ ]-1;1[\to IR$ $x\mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x}\ ;0\leq x<1 \\ \frac{x}{1+x};\ -1<x<0 \end{cases}$	