سلسلة 1	الحساب المثلثـــــي	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

1) α قياس زاوية حيث : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

أ) احسب $\cos 2\alpha$

ب) استنتج حساب α

2) β قياس زاوية حيث : $\tan\beta = 2+\sqrt{3}$ و $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

أ) احسب $\tan 2\beta$

ب) استنتج حساب β

تمرين 2 :

α قياس زاوية حيث : $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، احسب $\sin 2\alpha$ و احسب $\cos 3\alpha$

تمرين 3 :

1) بين أن : $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1+\sin x \quad \forall x\in IR$

2) بين أن : $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}-1 \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \ / k\in Z$

3) بين أن : $\cos^4 x = \cos 2x + \sin^4 x \quad \forall x\in IR$

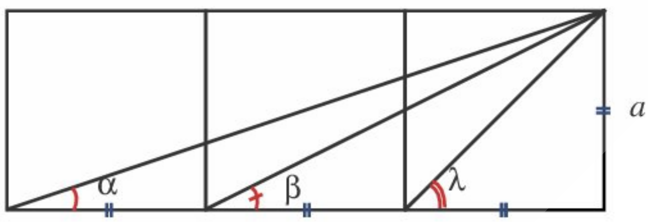
4) بين أن : $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x.\cos^2 x=1 \quad \forall x\in IR$

تمرين 4 : x و y عددان حقيقيان حيث : $\begin{cases}\sin x+\cos y=\sqrt{2}\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\end{cases}$ و $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$

1) احسب التعبير $\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

2) استنتج قيمة كل من x و y

تمرين 5 : نعتبر الشكل التالي :



1) احسب $\tan\alpha$ و $\tan\beta$

2) استنتج أن : $\alpha+\beta=\lambda$

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــي حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 :

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

1

أ) لدينا: $\cos 2\alpha = 2\cos^2(\alpha)-1 = 2\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}-1 = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{8}-1 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}-1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ب) لدينا $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ إذن : $0<2\alpha<\pi$ ، و بما أن : $\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $2\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ منه: $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{12}}$

2

$\tan\beta = 2+\sqrt{3}$ ، $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

أ) لدينا: $\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{2(2+\sqrt{3})}{1-(7+4\sqrt{3})} = \dfrac{2(2+\sqrt{3})}{-6-4\sqrt{3}} = \dfrac{-(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}} = \dfrac{-(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

ب) لدينا $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ منه: $0<2\beta<\pi$ و بما أن: $\tan 2\beta = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ فإن: $2\beta = \dfrac{5\pi}{6}$ بالتالي: $\boxed{\beta = \dfrac{5\pi}{12}}$

من الضروري حفظ النسب المثلثية للزوايا الخاصة : $\dfrac{\pi}{3}$ و $\dfrac{\pi}{6}$ و $\dfrac{\pi}{4}$ و بقية النسب يمكنك استخراجها مستعملا الدائرة المثلثية أو خاصيات الحساب المثلثي. فمثلا $\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

تمرين 2 : $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ ، $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

نعلم أن: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ منه: $\sin^2\alpha + \dfrac{9}{25} = 1$ منه: $\sin^2\alpha = 1-\dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

و بما أن: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ فإن: $\sin\alpha>0$ منه : $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ بالتالي : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$

لدينا:

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha.\cos\alpha - \sin 2\alpha.\sin\alpha = (2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha - \sin 2\alpha.\sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \left(\frac{18}{25}-1\right)\times\frac{3}{5}-\frac{24}{25}\times\frac{4}{5} = \frac{-7}{25}\times\frac{3}{5}-\frac{96}{125} = \frac{-117}{125}$$

لا يجب نسيان تطبيق الخاصية الأساسية للحساب المثلثي $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ كلما دعت الحاجة لذلك.

تمرين 3 :

1 لدينا: $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2 = \left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right).\left(\cos\dfrac{x}{2}\right) = 1+\sin\left(2\times\dfrac{x}{2}\right) = 1+\sin x$

2 لدينا: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \;/ k\in Z \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}-1 = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

3 لدينا:

$$\cos^4 x-\sin^4 x = (\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$\cos^4 x-\sin^4 x = 1\times(\cos x\cos x-\sin x\sin x)$$ بالتالي: $\forall x\in IR \quad \cos^4 x = \cos 2x+\sin^4 x$

$$\cos^4 x-\sin^4 x = \cos(x+x) = \cos(2x)$$

4 لدينا:

$$A = \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x.\cos^2 x = (\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3++3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$A = (\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x)+3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$A = \sin^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x = (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 = 1$$

تمرين 4 : $\begin{cases}\sin x+\cos y = \sqrt{2}\\ \sin^2 x+\cos^2 y = 1\end{cases}$ ، $(x,y)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]^2$

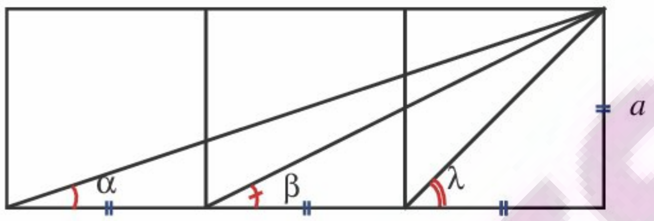
1 لدينا :

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y-\sqrt{2}\cos y+\frac{1}{2}+\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x+\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y+\cos^2 x-\sqrt{2}(\cos y+\cos x)+1=1-2+1=0$$

2 من السؤال السابق نستنتج أن : $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، و بما أن $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$ فإن : $x=y=\frac{\pi}{4}$

تمرين 5 :



1 لدينا: $\tan\alpha=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$ و $\tan\alpha=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

2 لدينا : $\tan\lambda=\frac{a}{a}=1$ و $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$

منه: $\tan(\alpha+\beta)=1$

ولدينا : $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{1}{2}<1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ و $\begin{cases}\tan\beta=\frac{1}{3}<1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\beta<\frac{\pi}{4}$

منه: $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

الآن : $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ \tan(\alpha+\beta)=1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ و $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ \tan(\alpha+\beta)=1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ بالتالي : $\boxed{\alpha+\beta=\lambda}$

فكرة التمرين واضحة : للبرهان على تساوي زاويتين نبرهن على تساوي إحدى النسب المثلثية (في المثال الظل) مع إمكانية تطبيق قواعد الجمع و الطرح، لكن يجب الانتباه أن الاستنتاج لا يكون كاملا إلا إذا برهنا أن الزاويتين تنتميان معا لمجال من الشكل $\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث $k\in Z$ لأن العبارة : $\tan x=\tan y\Rightarrow x=y$ لا تكون صحيحة إلا مع الشرط السابق.