

المنطق

حسن وراق

التمرين 1

نعتبر العبارة (P) التالية : $x^2 - xy + y^2 = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$: (P)

أ- اعط نفي العبارة (P) .

ب- بين أن العبارة (P) خاطئة .

التمرين 2

باستعمال الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس بين أن :

أ- $a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.

ب- $\forall x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$.

بين بالترجع كلا من العبارات التالية :

أ- $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n^2+1)^2}{4}$.

ب- $\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1+na$.

ج- لكل عدد صحيح طبيعي n العدد : $3^{2n} + 2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11 .

د- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع العدد المكون من n رقم كلها تساوي 7 $(a_1 = 7; a_2 = 77; a_3 = 777; \dots)$.

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; a_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$.

ت- $\forall n \geq 24; \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 : n = 5p + 7q$.

التمرين 3

1- بين أن : p^2 زوجي $\Leftrightarrow p$ زوجي $\forall p \in \mathbb{Z}$.

2- بين أن كلا من العددين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ ليس عددا جذريا .

3- بين أن $(\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2; a + b\sqrt{2} = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$.

التمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1- اعط نفي العبارة $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2; (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b))$.

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج أن العبارة السابقة خاطئة .

التمرين 5

بين أن : $\forall x \in [-2; 2]; \sqrt{4-x^2} - x \leq 2\sqrt{2}$.

بين أن $\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(x+2) > 0$.

1- بين أن $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) (|a| < 1 \text{ et } |b| < 1 \Rightarrow |a+b| < |1+ab|)$.

2- بين أن : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) \left(2x + 4y = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 20 \right)$.

3- بين أن $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{*2}) ((xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1))$.

4- بين أن : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow |ac + bd| \leq 1$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية .

المنطق

حسن وراق

التمرين 6

a, b, c أعداد حقيقية. نعتبر المعادلات التالية :

$$(E_1): x^2 - 2ax + bc = 0$$

$$(E_2): x^2 - 2bx + ac = 0$$

$$(E_3): x^2 - 2cx + ab = 0$$

بين أنه على الأقل إحدى المعادلات السابقة تقبل حلا.

التمرين 7

f دالة عددية معرفة على المجال $[0;1]$ بحيث: $\forall x \in [0;1], 0 \leq f(x) \leq 1$.

1- بين أن: $|f(1) - f(0)| \leq 1$.

2- نفترض أن f تحقق $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ $\forall (x, y) \in [0;1]^2$.

بين أن: $|f(1) - f(0)| \geq 1$.

3- بين أنه إذا كانت f تحقق العلاقتين (1) و (2) فإن $(f(0) = 1 \text{ و } f(1) = 0)$ أو $(f(0) = 0 \text{ و } f(1) = 1)$.

4- بين أن: $f(0) = 0 \Rightarrow (\forall x \in [0;1]: f(x) = x)$.

5- بين أن: $f(0) = 1 \Rightarrow (\forall x \in [0;1]: f(x) = 1 - x)$.

التمرين 8

1- a و b من $\mathbb{R}^{**}$.

أ- بين أن: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

ب- بين أن: $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ et $ab \leq \frac{1}{4}$.

ج- بين أن: $a+b=1 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

2- بين أن: $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \left(\frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} < c \Rightarrow |a| < c \text{ et } |b| < c \right)$.

المنطق

حسن ورقان

