تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 4 مع حلولها

تمرين 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = -x^2 + 1$$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 1 على IR.

حل التمرين 1

لنبين أن الدالة f مكبورة بالعدد 1 على IR.

لدينا : لكل x من IR :

$$f(x) - 1 = (-x^2 + 1) - 1$$
$$f(x) - 1 = -x^2 + 1 - 1$$
$$f(x) - 1 = -x^2$$

ونعلم أن $x^2 \geqslant 0$ لكل x من IR .

إذن : $-x^2 \leqslant 0$ لكل x من IR .

ومنه : $f(x) - 1 \leqslant 0$

ومنه المطلوب. $f(x) \leqslant 1$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

1 – تحقق أن مهما يكن x من IR.

$$f(x) = (x-1)^2 + 2$$

2 – استنتج أن الدالة f مصغورة بالعدد 2 على IR.

حل التمرين 2

1 – لنتحقق من المتساوية.

لكل x من IR لدينا :

$$(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2$$
$$(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$$

إذن : $(x-1)^2 + 2 = f(x)$

إذن : $f(x) = (x-1)^2 + 2$

2 – لنبين أن f مصغورة بالعدد 2 على IR

لكل x من IR لدينا :

$$f(x) - 2 = (x-1)^2 + 2 - 2$$
$$f(x) - 2 = (x+1)^2$$

ونعلم أن : $(\forall x \in IR); (x-1)^2 \geqslant 0$

إذن : $f(x) - 2 \geqslant 0$

ومنه : $f(x) \geqslant 2$

تمرين 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^2 + x$$

1 – ليكن x و y من IR .

بين أن : $f(x) - f(y) = (x-y)(x+y+1)$

2 – استنتج أن f تناقصية على المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$

وتزايدية على المجال $\left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$.

3 – اعط جدول تغيرات f.

حل التمرين 3

1 – ليكن x و y من IR .

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x^2 + x) - (y^2 + y) \\ &= x^2 + x - y^2 - y \\ &= x^2 - y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x+y) + (x-y) \\ &= (x-y)(x+y+1) \end{aligned}$$

إذن : $f(x) - f(y) = (x-y)(x+y+1)$

2 – • على المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$ لدينا :

$\begin{cases} x \leqslant \frac{-1}{2} \\ y \leqslant \frac{-1}{2} \end{cases}$ و منه : $x+y \leqslant \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}$

$x+y \leqslant -1$

إذن : $\boxed{x+y+1 \leqslant 0}$

ومنه : إذا كان $x \geqslant y$ فإن : $x-y \geqslant 0$

وبما أن : $x+y+1 \leqslant 0$

فإن : $(x-y)(x+y+1) \leqslant 0$

وبالتالي : $f(x) \leqslant f(y)$

وهذا يعني أن f تناقصية على $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$.

• على المجال $\left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$.

$\begin{cases} x \geqslant \frac{-1}{2} \\ y \geqslant \frac{-1}{2} \end{cases}$ و منه : $x+y \geqslant \frac{-1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x+y \geqslant -1$

إذن : $\boxed{x+y+1 \geqslant 0}$

إذا كان $x \geqslant y$ فإن : $x-y \geqslant 0$

ومنه : $(x-y)(x+y+1) \geqslant 0$

إذ ن f تزايدية على $\left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$.

3 – جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$\frac{-1}{4}$	↗	

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1-2}{4} = \frac{-1}{4}$$

تمرين 5

1 – تحقق من أن : لكل x من IR :

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

2 – أدرس إشارة $x^3 - 3x + 2$

3 – نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$g(x) = \frac{-2}{x}$$

أ – بين أن لكل x من IR^* :

$$f(x) - g(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

ب – استنتج مقارنة للدالتين f و g على IR^* :

حل التمرين 5

1 – التحقق من المتساوية :

$$(x-1)^2(x+2) = (x^2 - 2x + 1)(x+2)$$
$$= x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2$$
$$= x^3 - 3x + 2$$

2 – إشارة $x^3 - 3x + 2$

لدينا : $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$

وإشارة $x^3 - 3x + 2$ تلخص في الجدول كما يلي :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+		+	0	+	
$x+2$		-	0	+		+	
$x^3 - 3x + 2$		-	0	+	0	+	

3 – أ – لكل x من IR^* لدينا :

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3 - \left(\frac{-2}{x}\right)$$
$$= x^2 - 3 + \frac{2}{x}$$
$$= \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$x^3 - 3x + 2$		-	0	+	0	+	0	+	
x		-		-	0	+		+	
$f(x) - g(x)$		-	0	-	‖	+	0	+	

وبالتالي نستنتج المقارنة المطلوبة.