

التمرين الأول: (3 نقط)

- 1 ن حدد جميع قواسم العدد 26
2 ن حدد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية x و y التي تحقق $(x+2)(y+1)=26$

حلول:

- 1 مجموعة قواسم العدد 26 هي : $D_{26} = \{1; 2; 13; 26\}$
2 x و y عدنان صحيحان طبيعيان إذن $x+2$ و $y+1$ عدنان صحيحان طبيعيان حداؤهما 26
ومنه فإن المعادلة تكافئ: $\begin{cases} x+2=1 \\ y+1=26 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+2=26 \\ y+1=1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+2=2 \\ y+1=13 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+2=13 \\ y+1=2 \end{cases}$
أي: $\begin{cases} x=1-2 \\ y=26-1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=26-2 \\ y=1-1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=2-2 \\ y=13-1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=13-2 \\ y=2-1 \end{cases}$
يعني: $\begin{cases} x=-1 \\ y=25 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=24 \\ y=0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=0 \\ y=12 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=11 \\ y=1 \end{cases}$
وبالتالي: $S = \{(24;0); (0;12); (11;1)\}$ $(-1 \notin \mathbb{N})$

التمرين الثاني: (2 نقط)

تنطلق من ميناء الدار البيضاء باخرة A بعد كل 12 يوما وبخرة B بعد كل 18 يوما. إذا علمت أنهما انطلقتا للمرة الأولى في نفس اليوم، فبعد كم يوما ستنتقلان في نفس اليوم للمرة الثانية؟

حلول:

الأيام التي ستنتقل فيها البخرة A للمرات المقبلة هي: 12 - 24 - 36 - 48 - 60 - 72 - ... وهي مضاعفات العدد 12.

كذلك البخرة B : 18 - 36 - 54 - 72 - 90 - ... وهي مضاعفات العدد 18
ومنه نستنتج أن الباخرتين ستنتقلان في نفس اليوم للمرة الثانية بعد 36 يوما من خلال الكشف السابق.
كما يمكن الحصول على 36 بحساب المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18 أو: $\text{ppcm}(12;18)$

التمرين الثالث: (1.5 نقط)

بين أنه إذا كانت 7 تقسم $n-1$ فإن 7 تقسم أيضا العدد n^2-1 لكل n من $\mathbb{N}$

حلول:

لدينا 7 تقسم $n-1$ إذن يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $n-1=7k$
وبما أن:

$$n^2-1=(n-1)(n+1) \\ =7k(n+1)$$

فإن 7 يقسم أيضا: n^2-1

التمرين الرابع: (3.5 نقط)

- 1 ن بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: n^2-2n+2 هو عدد صحيح طبيعي
0.5 ن تحقق من أن: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ لكل عددين حقيقيين a و b
1 ن اكتب على شكل فرق مربعين كاملين: n^4+4 لكل n من $\mathbb{N}$
1 ن استنتج من ذلك أن n^4+4 غير أولي، لكل n من $\mathbb{N}$ مخالف للعدد 1

حلول:

1 لدينا

$$n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2n + 1 + 1$$

$$= (n-1)^2 + 1$$

(2)

$$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

$$= a^2 + b^2$$

(3) لدينا:

$$n^4 + 4 = (n^2)^2 + 2^2$$

$$\text{إذن } n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 2 \times n^2 \times 2 \text{ وذلك حسب نتيجة السؤال السابق}$$

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \text{ ومنه النتيجة:}$$

(4) حسب نتيجة السؤال السابق لدينا إذن:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$$

$$= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$$

$$= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) \quad (5)$$

$$= ((n-1)^2 + 1)((n+1)^2 + 1)$$

وحيث إن: $n \neq 1$ فإن كلا من $(n-1)^2 + 1$ و $(n+1)^2 + 1$ عدنان صحيحان طبيعيان أكبر من أو يساوي 2 وبالتالي فإن $n^4 + 4$ له أكثر من قاسمين يخالفان 1 فهو غير أولي.

التمرين الخامس: (2 نقطة)

$$A = 7^{n+1} + 5 \times 7^n \text{ نضع:}$$

(1) بين أن العدد: A يقبل القسمة على 12

(2) استنتج تفكيكا للعدد A إلى جداء عوامل أولية

حلول:

(1) لدينا:

$$A = 7^{n+1} + 5 \times 7^n$$

$$= 7 \times 7^n + 5 \times 7^n$$

$$= 7^n (7 + 5)$$

$$= 12 \times 7^n$$

$$(2) \text{ ومنه فإن: } A = 12 \times 7^n$$

$$= 2^2 \times 3 \times 7^n$$

التمرين السادس: (5 نقطة)

$ABCD$ متوازي الأضلاع.

(1) أنشئ النقطتين E و F بحيث: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DF} = \frac{-1}{4} \overrightarrow{DB}$

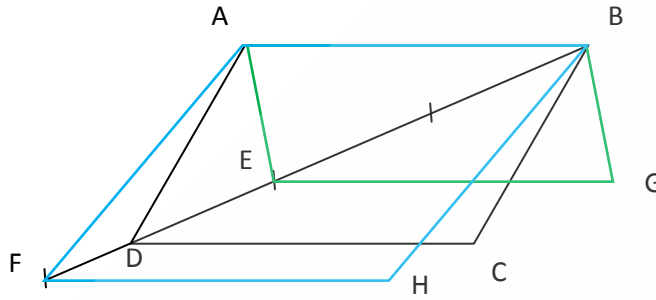
(2) اكتب $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{DF}$

(3) أنشئ H و G ليكون $BAEG$ و $BAFH$ متوازيي الأضلاع

(4) بين أن: $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$

(5) استنتج أن النقط C و H و G مستقيمية.

حلول:



(1) إنشاء النقطتين E و F

(2) كتابة $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{DF}$:

$$\text{لدينا: } \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \text{ و } \overrightarrow{DF} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{DB}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{DB} = -4\overrightarrow{DF} \text{ و } \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$\text{إذن } \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} - 4\overrightarrow{DF}$$

(3) إنشاء H و G: انظر الشكل

(4) لدينا $ABCD$ و $BAFH$ متوازي الأضلاع إذن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FH}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ومنه: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FH}$ أي: $DCHF$ متوازي الأضلاع وبالتالي: $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ كذلك: $ABCD$ و $ABGE$ متوازي الأضلاع إذن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ومنه: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EG}$ أي: $DEGC$ متوازي الأضلاع وبالتالي: $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$

التمرين السابع: (3 نقطة)

$$\text{مثلث } EFG \text{ مثلث. } A \text{ و } B \text{ نقطتان بحيث: } \overrightarrow{EA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EG} \text{ و } \overrightarrow{FB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FA}$$

(1) اكتب: $\overrightarrow{EA}$ بدلالة $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{AF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

(2) استنتج أن $(BG) \parallel (EF)$

(3) نقطة بحيث: $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{AG}$. بين أن $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{FM}$ مستقيمتان

حلول:

$$(1) \text{ لدينا: } \overrightarrow{EA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EG} \text{ إذن وحسب علاقة شال فإن: } \overrightarrow{EA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$$

$$\text{ومنه: } \overrightarrow{EA} - \frac{4}{3}\overrightarrow{EA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} \text{ أي: } \frac{-1}{3}\overrightarrow{EA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} \text{ وبالتالي: } \overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{AG}$$

$$\text{كذلك لدينا: } \overrightarrow{FB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FA} \text{ إذن وحسب علاقة شال فإن: } \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FA} \text{ أي: } \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FA}$$

$$\text{وبالتالي: } \overrightarrow{AB} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{FA} \text{ أي: } \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AB}$$

(2) حسب نتيجة السؤال السابق لدينا: $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{GA}$ ومنه فإن:

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{AB}$$

$$\text{أي: } \overrightarrow{EF} = 4(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) \text{ (علاقة شال)}$$

$$\text{وبالتالي: } \overrightarrow{EF} = 4\overrightarrow{GB} \text{ ومنه النتيجة}$$

(3) لدينا: $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{AG}$ إذن $\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AG}$ أي $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{AG}$

$$\text{ومنه فإن } \overrightarrow{FM} = 2\overrightarrow{AG} \text{ (علاقة شال)}$$

$$\text{وحيث أن: } \overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{GA} \text{ فإن } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \text{ ومنه نستنتج: } \overrightarrow{FM} = 2 \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \text{ أي } \overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$