www.students.com

## الاشتقاق و دراسة الدوال

**تمرين1**

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} & x\in[0;2]-\{1\} \\ f(1)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

بين أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق في 1

الحل

لنبين أن : $f$ قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}-\frac{1}{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{3+x}-(x+7)}{4(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)^2}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{3+x}-(x+7)\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{1}{64}}$$

**تمرين2**

$f(x)=|x^2+2x-15|$ حدد $f_g'(3)$ ؛ $f_d'(3)$ ثم معادلة نصف المماس ل $(C_f)$ على يسار و على يمين النقطة ذات الأفصول 3

الحل

$$f_g'(3)=-6 \qquad f_d'(3)=6$$

**تمرين3**

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{25x^2-24}-x}{x-1} & x\in\left[\dfrac{2}{5}\sqrt{6};+\infty\right[-\{1\} \\ f(1)=24 \end{cases}$$

ب- بين أن $f$ قابلة للاشتقاق في 1

ج- احسب $f'(x)$

الحل

لنبين أن : $f$ قابلة للاشتقاق في 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{25x^2-24}-x}{x-1}-24}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{25x^2-24}-(25x-24)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{25x^2-24-(25x-24)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{25x-24}+(25x-24)\right)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-600(x^2-2x+1)}{(x-1)^2\left(\sqrt{25x-24}+(25x-24)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-600}{\left(\sqrt{25x-24}+(25x-24)\right)}$$

$$=-\frac{600}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-300$$

إذن : $f$ قابلة للاشتقاق في 1 و $\boxed{f'(1)=-300}$

حساب : $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{25x^2-24}-x}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)'(x-1)-\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{25x}{\sqrt{25x^2-24}}-1\right)(x-1)-\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\left(25x-\sqrt{25x^2-24}\right)(x-1)-\sqrt{25x^2-24}\left(\sqrt{25x^2-24}-x\right)}{(x-1)^2\sqrt{25x^2-24}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{25x^2-24}-25x+24}{(x-1)^2\sqrt{25x^2-24}}}$$

**تمرين4**

$f$ قابلة للاشتقاق في $a$

احسب : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$

الحل

نضع : $\alpha=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$

$$\alpha=\lim_{h\to 0}h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}=-f'(a)$$

**تمرين5**

احسب $f'(x)$ في كل حالة :



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

أ- $f(x)=\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x^3}}$ ب- $f(x)=\arctan(7x^3-5x)$

ج- $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{3x^2+7}}{\sqrt[3]{x^2}}$ د- $f(x)=arc\tan\sqrt[4]{3x^2+7}$

## تمرين6

أ- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$

$(C_f)$ يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 3

ب- $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty$

$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

ج- $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأعلى

د- $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

$(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

## تمرين7

$f(x)=2x+\sqrt{3x-6}$

حدد $I=D_f$

1- اثبت أن $f$ المعرفة من $I$ نحو $J$ ( يجب تحديد $J$ ) تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ . ثم حدد $f^{-1}$

2- استنتج أن المعادلة : $f(x)=6$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

الحل

1- $f(x)=2x+\sqrt{3x-6}$

حدد $I=D_f=[2,+\infty[$

$f$ متصلة على $[2,+\infty[$ قابلة للإشتقاق على $]2,+\infty[$

$$f'(x)=2+\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$$

بما أن : $\forall x\in]2,+\infty[\quad f'(x)>0$

فإن : $f$ تزايدية

إذن : $f([2,+\infty[)=[4,+\infty[$

$f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$

تحديد : $f^{-1}$

$$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x$$
$$\Leftrightarrow 2y+\sqrt{3y-6}=x$$
$$\Leftrightarrow 4y^2-y(4x+3)+x^2+6=0$$
$$4y^2-y(4x+3)+x^2+6=0$$
$$\Delta=24x-87$$
$$y_1=\frac{4x+3-\sqrt{24x-87}}{8}$$
$$y_2=\frac{4x+3+\sqrt{24x-87}}{8}$$ أو

نعتبر : $x=4$ نجد $y_1=2$ و $y_2\#2$

بما أن : $f(2)=4$ فإن : $f^{-1}(x)=y_1$

إذن : $f^{-1}(x)=\dfrac{4x+3-\sqrt{24x-87}}{8}$

2- بما أن $f$ متصلة و رتيبة قطعا و

$f([2,+\infty[)=[4,+\infty[$

و $6\in[4,+\infty[$

فإن : المعادلة : $f(x)=6$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

## تمرين8

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

حدد $I=D_f$

أ- اثبت أن $f$ المعرفة من $I$ نحو $J$ ( يجب تحديد $J$ ) تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ . ثم حدد $f^{-1}$

الحل

أ- $I=D_f=]-1,+\infty[$

$f$ متصلة على $D_f$ قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

(1)

$$\forall x\in]-1,+\infty[\quad f'(x)=\frac{x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

بما أن : $\forall x\in]-1,+\infty[\quad f'(x)>0$

فإن : $f$ تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$ (2)

إذن : $f(]-1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$

و منه : $f(]-1,+\infty[)=\mathbb{R}$

من (1) و (2) : $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$

تحديد : $f^{-1}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in]-1,+\infty[$



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y+1}}=x \;;\; xy\geq 0$$
$$\Leftrightarrow y^2=x^2\left(y+1\right) \;;\; xy\geq 0$$
$$\Leftrightarrow y^2-x^2y-x^2=0 \;;\; xy\geq 0$$
$$\Delta=x^4+4x^2$$

$$y_2=\frac{x^2+\sqrt{x^4+4x^2}}{2} \text{ أو } y_1=\frac{x^2-\sqrt{x^4+4x^2}}{2}$$

بما أن : $xy\geq 0$ و $y_2\geq 0$

فإن : $f^{-1}(x)=y_1$

إذن : $\forall x\in[9;+\infty[ \;:\; f^{-1}(x)=\frac{x^2-\sqrt{x^4+4x^2}}{2}$

و منه :
$$f^{-1}:\ \mathbb{R}\to\left]-1;+\infty\right[$$
$$x\ \to\ \frac{x^2-\sqrt{x^4+4x^2}}{2}$$

**تمرين9**

$x\in[1;+\infty[ \quad f(x)=\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}$

حدد $I=D_f$

أ- اثبت أن $f$ المعرفة من $I$ نحو $J$ ( يجب تحديد $J$ ) تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ . ثم حدد $f^{-1}$

**الحل**

أ - $I=D_f=[1;+\infty[$

$f$ متصلة على $D_f$ قابلة للإشتقاق على $[1;+\infty[$ (1)

$$\forall x\in[1;+\infty[ \quad f'(x)=\frac{x^2-1}{3x^2\sqrt[3]{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}$$

بما أن : $\forall x\in[1;+\infty[ \quad f'(x)>0$

فإن : $f$ تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$ (2)

إذن : $f\left([1;+\infty[\right)=\left[f(1);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$

و منه : $f\left([1;+\infty[\right)=\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$

من (1) و (2) : $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$

تحديد : $f^{-1}$

ليكن $x\in\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$ و $y\in[1;+\infty[$

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y+\frac{1}{y}}=x$$
$$\Leftrightarrow y^2+1=yx^3$$
$$\Leftrightarrow y^2-yx^3+1=0$$
$$\Delta=x^6-4$$

$$y_2=\frac{x^3+\sqrt{x^6-4}}{2} \text{ أو } y_1=\frac{x^3-\sqrt{x^6-4}}{2}$$

بالنسبة ل $x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ نجد : $y_2=2$ و $y_1\neq 2$

بما أن : $f(2)=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ فإن : $f^{-1}(x)=y_2$

إذن : $\forall x\in\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[ \;:\; f^{-1}(x)=\frac{x^3+\sqrt{x^6-4}}{2}$

و منه :
$$f^{-1}:\ \left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[\to[1;+\infty[$$
$$x\ \to\ \frac{x^3+\sqrt{x^6-4}}{2}$$

**تمرين10**

$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}$

حدد $I=D_f$

أ- اثبت أن $f$ المعرفة من $I$ نحو $J$ ( يجب تحديد $J$ ) تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ . ثم حدد $f^{-1}$

**الحل**

أ - $I=D_f=[0;+\infty[$

$f$ متصلة على $D_f$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ (1)

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[ \quad f'(x)=\frac{1}{4\sqrt{x}\,(1+x)}$$

بما أن : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[ \quad f'(x)>0$

فإن : $f$ تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ (2)

إذن : $f\left([0;+\infty[\right)=\left[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$

و منه : $f\left([0;+\infty[\right)=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

من (1) و (2) : $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$

تحديد : $f^{-1}$

ليكن $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ و $y\in[0;+\infty[$



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

$$\lim_{x\to 216}\frac{\sqrt[3]{x}-6}{x-216}=\lim_{x\to 216}\frac{x-216}{(x-216)\left(\sqrt[3]{x}^{2}+3\sqrt[3]{x}+9\right)}$$ -1

$$=\lim_{x\to 216}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}^{2}+6\sqrt[3]{x}+36\right)}$$

$$\lim_{x\to 216}\frac{\sqrt[3]{x}-6}{x-216}=\frac{1}{108}$$

أو العدد المشتق : نعتبر : $g(x)=\sqrt[3]{x}-6$ ؛ $g(6)=0$

$$g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}\quad ;\quad g'(6)=\frac{1}{108}$$

$$\lim_{x\to 216}\frac{\sqrt[3]{x}-6}{x-216}=g'(6)=\frac{1}{108}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[4]{x+1}^{3}+\sqrt[4]{x+1}^{2}+\sqrt[4]{x+1}+1\right)}$$ -2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}=\frac{1}{4}$$

أو العدد المشتق : نعتبر : $g(x)=\sqrt[4]{x+1}-1$

-3 نعتبر : $\alpha=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^{3}+x+1}-\sqrt[3]{x^{3}+2}$

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^{3}+x+1}^{2}+\sqrt[3]{x^{3}+x+1}\sqrt[3]{x^{3}+2}+\sqrt[3]{x^{3}+2}^{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x^{3}}}^{2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x^{3}}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^{3}}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^{3}}}^{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^{3}+x+1}-\sqrt[3]{x^{3}+2}=0$$

$$\lim_{x\to 32}\frac{\sqrt[5]{x}-2}{\sqrt[5]{x+992}-4}$$ -4

-5 نضع : $t=\sqrt[5]{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x+\sqrt[5]{x^{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{\sqrt[5]{t^{5}+t^{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{t\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{t^{3}}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x+\sqrt[5]{x^{2}}}}=1$$

$$f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{y}=x$$

$$\Leftrightarrow \arctan\sqrt{y}=2x-\frac{\pi}{2}\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\arctan\sqrt{y}\right)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)(2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)(3)$$

$$\Leftrightarrow y=\tan^{2}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)(4)$$

$\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ : لأن $(2)\Rightarrow(1)$

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\geq 0$ : لأن $(4)\Rightarrow(3)$

إذن : $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ : $f^{-1}(x)=\tan^{2}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{-1}:\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\to[0;+\infty[$$

$$x\quad\to\tan^{2}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

و منه :

**تمرين11**

بين أن : $\sqrt{a^{3}+a^{2}b}+\sqrt{b^{3}+b^{2}a}=\sqrt{(a+b)^{3}}$

- استنتج تبسيطا ل :

$$\sqrt{x^{2}+\sqrt[3]{x^{4}}\sqrt[3]{y^{2}}}+\sqrt{y^{2}+\sqrt[3]{x^{2}}\sqrt[3]{y^{4}}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{y^{2}}\right)^{3}}$$

**الحل**

نضع : $\alpha=\left(\sqrt{a^{3}+a^{2}b}+\sqrt{b^{3}+b^{2}a}\right)^{2}$

$$\alpha=a^{3}+a^{2}b+b^{3}+b^{2}a+2\sqrt{\left(a^{3}+a^{2}b\right)\left(b^{3}+b^{2}a\right)}$$

$$=a^{3}+a^{2}b+b^{3}+b^{2}a+2\sqrt{2a^{3}b^{3}+a^{2}b^{4}+a^{4}b^{2}}$$

$$=a^{3}+a^{2}b+b^{3}+b^{2}a+2\sqrt{a^{2}b^{2}(a+b)^{2}}$$

$$=a^{3}+3a^{2}b+3b^{2}a+b^{3}$$

إذن : $\sqrt{a^{3}+a^{2}b}+\sqrt{b^{3}+b^{2}a}=\sqrt{(a+b)^{3}}$

نعتبر : $a=\sqrt[3]{x^{2}}\ ;\ b=\sqrt[3]{y^{2}}$

**تمرين12**

احسب



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

## تمرين13

-1

$$\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[4]{2}$$

$$\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{1-x}\right)^4=2$$

$$4\sqrt[4]{(x+1)^3(1-x)}+6\sqrt[4]{(x+1)^2(1-x)^2}+4\sqrt[4]{(x+1)(1-x)^2}=0$$

إذن: $(x+1)(1-x)=0$ و منه : $x=1$ أو $x=-1$

-2 نضع : $y=\sqrt[3]{x}$

$$\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3+125=0\Leftrightarrow\frac{1-y}{3-y}=-5$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{8}{3}$$

إذن: $\boxed{x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}}$

-1 نضع : $t=\sqrt[6]{x}$

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}=12\Leftrightarrow t^2+t^3=12$$

$$\Leftrightarrow t^2-4+t^3-8=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left((t+2)+\left(t^2+2t+4\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(t^2+3t+6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t=2$$

إذن: $\boxed{x=2^6=64}$

## تمرين14

-1 حساب : $\arctan 2+\arctan 3$

- نضع : $\alpha=\arctan 2\ ;\ \beta=\arctan 3$

$$\tan(\alpha+\beta)=-1$$

إذن : $(k\in\mathbb{Z})\quad \alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

لدينا: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ ;\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$

إذن : $0<\alpha+\beta<\pi$ و $0<-\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi$

و منه : $1<4k<5$ إذن : $k=1$

إذن : $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$

$$\boxed{\arctan 2+\arctan 3=\frac{3\pi}{4}}$$

-2 حساب : $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$

- نضع :

$$\alpha=\arctan\frac{1}{2}\ ;\ \beta=\arctan\frac{1}{5};\ \gamma=\arctan\frac{1}{8}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$$

إذن : $(k\in\mathbb{Z})\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}+k\pi$

لدينا: $0<\frac{1}{2}<1\ \Rightarrow\ 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

كذلك نجد: $0<\beta<\frac{\pi}{4}\ ;\ 0<\gamma<\frac{\pi}{4}$

إذن : $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$ و $0<\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{3\pi}{4}$

و منه : $-1<4k<2$ إذن : $k=0$

إذن : $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}}$$

-3 لنبين أن : $2\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{3}{4}$

- نضع : $\alpha=\arctan\frac{1}{3}\ ;\ \beta=\arctan\frac{3}{4}$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$ و $\tan\beta=\frac{3}{4}$

إذن : $\tan(2\alpha)=\tan\beta$

و منه : $(k\in\mathbb{Z})\quad 2\alpha\alpha=\beta+k\pi$

لدينا: $0<\frac{1}{3}<1\ \Rightarrow\ 0<\alpha<\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$

كذلك نجد: $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

إذن : $-\frac{\pi}{4}<k\pi<\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$

و منه : $-1<4k<1$ إذن : $k=0$

إذن : $2\alpha=\beta$

$$\boxed{2\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{3}{4}}$$

-4 لنبين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+\quad \arctan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}=\frac{\pi}{4}$$

نعتبر : $f(x)=\arctan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}$

$f$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

و : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ ;\ f'(x)=0$

إذن : $f$ ثابتة على $\mathbb{R}^{+*}$

و بما أن : $f$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

فإن : $\forall x\in\mathbb{R}^+\ ;\ f(x)=f(0)=\frac{\pi}{4}$



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}^{+}\ \arctan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}=\frac{\pi}{4}$

5- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

نعتبر : $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$

$f$ متصلة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

و : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ ;\ f'(x)=0$

إذن : $f$ ثابتة على $\mathbb{R}^{+*}$

فإن : $\forall x\in\mathbb{R}^{+}\ ;\ f(x)=f(1)=\frac{\pi}{2}$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

أ- نعوض $x$ ب $-x$ في 5 ونسعمل : arctan فردية

نجد : $\forall x\in\mathbb{R}^{-*}\ \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

ب- $\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{\arctan x}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\right)=1$

## تمرين15

-1 $(E)\ :\ \arctan x+\arctan 3x=\frac{\pi}{3}$

$x\le0\Rightarrow\arctan x+\arctan 3x\le0$

بما أن : $x>0$ فإن : $\arctan x+\arctan 3x>0$

$(E)\Rightarrow\tan\left(\arctan x+\arctan 3x\right)=\tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow\frac{x+3x}{1-3x^{2}}=1\ ;\ x>0$

$\Rightarrow 4x=1-3x^{2}\ ;\ x>0$

$\Rightarrow 3x^{2}+4x-1=0\ ;\ x>0$

$\Rightarrow 3x^{2}+4x-1=0\ ;\ x>0$

$\Rightarrow x=\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\ ;\ x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\ ;\ x>0$

$\Rightarrow x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

$s=\left\{\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right\}$

-2 $\arctan 2x+\arctan 3x=\frac{\pi}{4}$

بنفس الطريقة نجد : $s=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

$\arctan\left(x^{2}+x\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x^{2}+x=1$

-3 $\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

## تمرين16

احسب

-1 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\arctan\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to0^{+}}\frac{\arctan t}{t}=1$

2- العدد المشتق : نعتبر : $g(x)=\arctan\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$

$g'(x)=\frac{2}{4+x^{2}}\qquad g'(2)=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\arctan\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}}{x-2}=\frac{1}{4}$

## تمرين 17

$$\begin{cases}f(x)=-1+\arctan\sqrt[3]{x+1} & x>-1\\ f(x)=x-\sqrt[3]{-x^{2}(x+1)} & x\le-1\end{cases}$$

(I 1- تحقق أن : $D_f=\mathbb{R}$

2- بين أن : $f$ متصلة في $-1$

$f(-1)=-1$

3- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-\sqrt[3]{-x^{2}(x+1)}$

$=-\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\arctan\sqrt[3]{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1+\frac{\pi}{2}$

-4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt[3]{-x^{2}(x+1)}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty} -x-\sqrt[3]{-x^2(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-x\sqrt[3]{-x^2(x+1)}+\sqrt[3]{-x^2(x+1)}^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}^2\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{(C_f) \text{ مقارب ل } y=2x+\frac{1}{3} \text{ بجوار } -\infty}$$

**5- ادرس قابلية اشتقاق $f$ في $-1$ ثم أول النتيجة هندسيا**

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{\arctan\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1^+} \frac{\arctan\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} \times \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$$

نضع : $t=\sqrt[3]{x+1}$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{t\to0^+} \frac{\arctan t}{t} \times \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t^2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty}$$

$f$ غير قابلة للإشتقاق يمين $-1$

و $(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول $-1$ موجه نحو الأعلى.

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-\sqrt[3]{-x^2(x+1)}+1}{x+1}$$

$$= 1+\lim_{x\to-1^-} \sqrt[3]{x^2} \lim_{x\to-1^-} \frac{\sqrt[3]{-(x+1)}}{-(x+1)}$$

$$= 1+\lim_{t\to0^+} \frac{1}{t^2} \qquad \left(t=\sqrt[3]{-(x+1)}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty}$$

$f$ غير قابلة للإشتقاق يسار $-1$

و $(C_f)$ يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول $-1$ موجه نحو الأسفل .

**6- تغيرات $f$ ثم إنشاء جدول تغيراتها**

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x+1}^2\left(1+\sqrt[3]{x+1}^2\right)} & x>-1 \\ f'(x) = 1+\dfrac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{-x^2(x+1)}^2} & x\le-1 \end{cases}$$

$\uparrow\downarrow$

$\forall x\le-1 \quad 3x^2+2x>0$

$f$ تزايدية على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\longrightarrow$ | $-1$ | $\longrightarrow$ | $-1+\frac{\pi}{2}$ |

**7- حل المعادلة : $f(x)=0$**

**من خلال جدول تغيرات $f$**

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -1+\arctan\sqrt[3]{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\tan 1$$

$$\boxed{f(x)=0 \Leftrightarrow x=(\tan 1)^3-1}$$

**8- إنشاء $(C_f)$**



Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com