تمارين: مبرهنة التزايدات المنتهية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمارين محلولة

التمرين1

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=\frac{1}{2}$; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

حيث $\forall x\in[0;+\infty[$ $g(x)=\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1- بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

3- استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

الحل

1- نبين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

نعتبر $h(x)=g(x)-x$ على $[0;1]$ لدينا h متصلة على $[0;1]$

لدينا $h'(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}-1$ ومنه h تناقصية قطعا على $[0;1]$

لدينا $h(0)\times h(1)=\frac{\pi}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right)$

$0\prec\sqrt{2}-1\prec\tan\frac{\pi}{4}\prec\tan 1$ (لأن $\frac{\pi}{4}\prec 1$, $\sqrt{2}-1\prec 1$) ومنه $0\prec\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)\prec 1$

إذن $h(0)\times h(1)\prec 0$

إذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

أي أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

لدينا $g(x)\in\,]0;1[$ $\forall x\in[0;+\infty[$

و حيث $u_0=\frac{1}{2}$; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ فان $0\prec u_n\prec 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (نبين ذلك بالترجع)

الدالة g متصلة في مجال مغلق طرفاه α و u_n وقابلة للاشتقاق في مجال مفتوح طرفاه α و u_n

ومنه يوجد c محصور قطعا بين α و u_n حيث $g(u_n)-g(\alpha)=g'(c)(u_n-\alpha)$

أي أن $u_{n+1}-\alpha=\frac{-1}{2(1+c^2)}(u_n-\alpha)$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|=\frac{1}{2(1+c^2)}|(u_n-\alpha)|$

و حيث أن $0\prec c\prec 1$ فان $\frac{4}{5}\prec\frac{1}{2}\prec\frac{1}{2(1+c^2)}\prec\frac{1}{4}$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3- نستنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

Moustaouli Mohamed

$$|u_1-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_1-\alpha|$$

. . .

. . .

. . .

$$|u_n-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على $|u_n-\alpha| \prec \left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0-\alpha|$

وحيث $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0-\alpha| = 0$ فان (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

التمرين2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $|f'(x)| \le \frac{1}{4\cos^2 1}$ $\forall x\in[0;1]$

2- بين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

3- أ- بين أنه : $f(\alpha)=\alpha$ $\exists!\alpha \in]0;1[$

ب- استنتج أن $|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$ $\forall x \in]0;1[-\{\alpha\}$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right) \end{cases}$

أ- بين أن $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0-\alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

الحل

f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

4- نبين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $|f'(x)| \le \frac{1}{4\cos^2 1}$ $\forall x\in[0;1]$

$x \to \frac{1}{x+1}$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $/k\in\mathbb{Z}$ $\frac{1}{x+1} \ne \frac{\pi}{2}+k\pi$ $\forall x\in[0;1]$

إذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

و $\forall x\in[0;1]\quad f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[1+\tan^2\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$

$$\forall x\in[0;1]\quad |f'(x)|=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$$

الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\frac{1}{(x+1)^2}$ تناقصيتان على $[0;1]$ و $\forall x\in[0;1]\quad \frac{1}{2}\le\frac{1}{x+1}\le 1$

ومنه $1\le\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\le\frac{1}{\cos^2 1}$; $\forall x\in[0;1]\quad \frac{1}{4}\le\frac{1}{(x+1)^2}\le 1$

إذن $\forall x\in[0;1]\quad |f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1}$

5- نبين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

$\forall x\in[0;1]\quad f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$ و منه $\forall x\in[0;1]\quad f'(x)\le 0$

إذن f تناقصية على $[0;1]$ ومنه $f([0;1])=\left[\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2};\frac{1}{4}\tan 1\right]\subset[0;1]$

6- أ- نبين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ $g(x)=f(x)-x\quad \forall x\in[0;1]$

g متصلة على $[0;1]$

$g(0)=\frac{1}{4}\tan(1)\ge 0$ و $g(1)=-1+\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2}\le 0$

إذن $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- نستنتج أن $|f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|\quad \forall x\in]0;1[-\{\alpha\}$

ليكن $x\in]0;1[-\{\alpha\}$

لدينا f متصلة على مجال مغلق طرفاه α و x

f قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح طرفاه α و x

ومنه يوجد عدد c ينتمي إلى I حيث $f(x)-f(\alpha)=f'(c)(x-\alpha)$

و حيث أن $\forall x\in[0;1]\quad |f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1}$ فان $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\}\quad |f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

-4 $\begin{cases} u_0\in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right)\end{cases}$