www.students.com

حساب الاحتمالات

تمرين1

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرة حمراء.

نسحب من الصندوق 4 كرات .

حدد في كل حالة

أ- عدد السحبات الممكنة ؟

ب- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء فقط ؟

ج- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأقل ؟

د- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأكثر ؟

1- تآنيا 2- بالتتابع بإحلال 3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تآنيا

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = C_9^4 = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$$

ب- نعتبر الحدث A : " الحصول على كرة سوداء فقط "

$$cardA = C_3^1 \times C_6^3 = 3\times20 = 60$$

ج- نعتبر الحدث B : " الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$$cardB = C_3^1\times C_6^3 + C_3^2\times C_6^2 + C_3^3\times C_6^1 = 3\times20+3\times15+6$$

$$cardB = 111$$

$\overline{B}$: عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = C_6^4 = 15$

$$cardB = 126-15 = 111$$

د- نعتبر الحدث C : " الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$$cardC = C_3^1\times C_6^3 + C_6^4 = 60+15 = 75$$

2- بالتتابع بإحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = 9^4 = 6561$$

ب- نعتبر الحدث A : " الحصول على كرة سوداء فقط "

$$A : C_4^1 nqqq$$

$$cardA = 4\times3\times6^3$$

$$cardA = 2592$$

ج- نعتبر الحدث B : " الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$\overline{B}$:عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = 6^4 = 1296$

$$cardB = 1296-6561 = 5265$$

د- نعتبر الحدث C : " الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$$A : C_4^1 nqqq \text{ أو } qqqq$$

$$cardC = 2592+1296 = 3888$$

3- بالتتابع بدون إحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = A_9^4 = 9\times8\times7\times6 = 3024$$

Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

ب- نعتبر الحدث A : " الحصول على كرة سوداء فقط "

A : $C_4^1 nqqq$

$cardA = 4 \times 3 \times A_6^3$

$cardA = 1440$

ج- نعتبر الحدث B : " الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$\overline{B}$: عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = A_6^4 = 360$

$cardB = 3024 - 360 = 2664$

د- نعتبر الحدث C : " الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

A : $C_4^1 nqqq$ أو $qqqq$

$cardC = 1440 + 360 = 1800$

تمرين2

من الأرقام : 2-3-4-5-6-7 كون عددا من ثلاثة أرقام .

أ - كم من عدد زوجي يمكن تكوينه ؟

ب- كم من عدد قابل للقسمة على 5 يمكن تكوينه ؟

الحل

أ - qqp : $6 \times 6 \times 3$

ب - $qq5$: $6 \times 6 \times 1$

تمرين3

أ - كم يوجد من عدد مكون من 5 أرقام ؟

ب - من بين هذه الأعداد كم يوجد من عدد يحتوي على رقم زوجي على الأقل ؟

الحل

أ - 9×10^4

ب - عدد الأعداد الذي لا يحتوي على أي رقم زوجي : 5^5

عدد الأعداد الذي يحتوي على رقم زوجي على الأقل

: $9 \times 10^4 - 5^5$

الاحتمال

تمرين4

يحتوي صندوق على 3 قطع نقدية

نسحب واحدة ثم نرميها ونسحب أخرى ثم نرميها

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الوجه F

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^1 \times 2 \times C_2^1 \times 2 = 24$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الوجه F "

$\overline{A}$: "عدم ظهور الوجه F "

$card\,\overline{A} = C_3^1 \times 1 \times C_2^1 \times 1 = 6$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 24 - 6 = 18$

$$p(A) = \frac{18}{24}$$

تمرين5

يحتوي صندوق على 3 نرود

نسحب واحدا ثم نرميه ونسحب آخر ثم نرميه

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^1 \times 6 \times C_2^1 \times 6 = 216$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$: "عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = C_3^1 \times 5 \times C_2^1 \times 5 = 150$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 216 - 150 = 66$

$$p(A) = \frac{66}{216}$$

تمرين6

نرمي نردين في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_6^1 \times C_6^1 = 36$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$: "عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = 5 \times 5 = 25$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 36 - 25 = 11$

$$p(A) = \frac{11}{36}$$

تمرين7

يحتوي صندوق على 3 نرود

نختار تآنيا نردين ثم نرميهما في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^2 \times 6 \times 6 = 108$

2- نعتبر الحدث A : " ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$: "عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = C_3^2 \times 5 \times 5 = 75$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 108 - 75 = 33$

$$p(A) = \frac{33}{108}$$

Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

تمرين8

يحتوي كيس على 10 بيدقات تحمل الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ 9 ؛ ...

الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 مكتوبة بالأحمر

الأرقام : 5 ؛ 6 ؛ 7 مكتوبة بالأزرق

الأرقام : 8 ؛ 9 مكتوبة بالأصفر

حدد في كل حالة الاحتمال لتكون :

أ- الأرقام زوجية ؟

ب- الأرقام لها نفس اللون ؟

1- تآنيا 2- بالتتابع بإحلال 3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تآنيا

$$card\,\Omega = C_{10}^{3} = 120$$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$$cardA = C_5^3 = 10$$

$$p(A) = \frac{10}{120}$$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$$cardB = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$$

$$p(B) = \frac{11}{120}$$

2- بالتتابع بدون إحلال

$$card\,\Omega = A_{10}^{3} = 720$$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$$cardA = A_5^3 = 60$$

$$p(A) = \frac{60}{720}$$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$$cardB = A_5^3 + A_3^3 = 60 + 6 = 66$$

$$p(B) = \frac{66}{720}$$

3- بالتتابع بإحلال

$$card\,\Omega = 10^3$$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$$cardA = 5^3$$

$$p(A) = \frac{5^3}{10^3} = \frac{1}{8}$$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$$cardB = 5^3 + 3^3 + 2^3 = 125 + 27 + 8 = 160$$

$$p(B) = \frac{160}{1000} = \frac{4}{25}$$

تمرين9

يحتوي كيس A على كرتين صفراوين و 3 كرات خضراء و 5 كرات حمراء و يحتوي كيس B على 4 كرات خضراء

نسحب تآنيا كرتين من الكيس A و نضعهما في الكيس B

ثم نسحب تآنيا كرتين من الكيس B

احسب احتمال الحصول على كرتين خضراوين بالضبط

الحل

$$card\,\Omega = C_{10}^{2} \times C_6^2 = 675$$

نعتبر الحدث C : " الحصول على كرتين خضراوين بالضبط "

$$q = R\ ou\ J$$

$$2q\ puis\ 2V\ ou\ q\ et\ V\ puis\ 2V\ ou\ 2V\ puis\ 2V : C$$

$$cardC = C_7^2 \times C_4^2 + C_7^1 \times C_3^1 \times C_5^2 + C_3^2 \times C_6^2$$

$$cardC = 381$$

$$p(A) = \frac{381}{675}$$

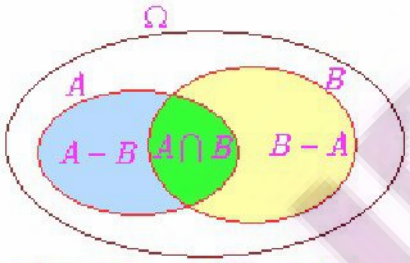
تمرين10

A و B حدثان بحيث :

$$P(A \cap B) = 1/6 ; P(B) = 1/4 ; P(A) = 1/3$$

احسب : $P_A(\overline{B}) ; P_A(B) ; P(\overline{A} \cup B) ; P(A \cup \overline{B}) ; P(A \cup B)$

الحل



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{12}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{6}}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$$

$$\boxed{P(A \cup \overline{B}) = \frac{11}{12}}$$

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}}$$

Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

$$P_A\left(\overline{B}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(A\right)}=\frac{1}{2}$$

تمرين11

يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء.
نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال .
نعتبر : الحدث A : " الكرة الأولى سوداء "
الحدث B : " الكرة الثانية حمراء "

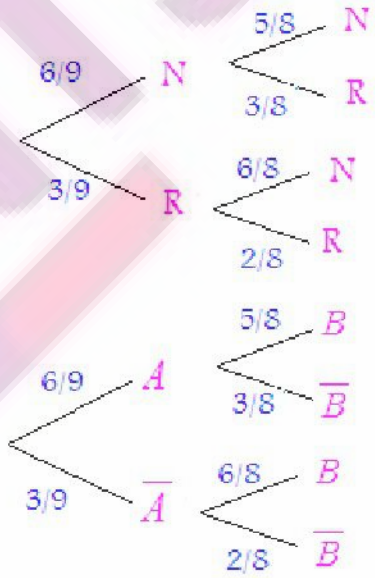
أ ـ حدد : $P\left(A\cap B\right);P\left(B\right);P\left(A\right)$

ب- هل A و B مستقلان ؟

ج- احسب : $P_B\left(A\right)$ ، $P\left(A\cup B\right)$ ، $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

الحل

الطريقة 1 : باستعمال شجرة الاحتمالات



$$P\left(A\right)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$P\left(B\right)=P\left(A\right)P_A\left(B\right)+P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}\left(B\right)$$

$$P\left(B\right)=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P_A\left(B\right)=\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

الطريقة 2 : بدون استعمال شجرة الاحتمالات

أ ـ $card\Omega=9\times8=72$

الحدث A : **NX** (**X** سوداء أو حمراء)

$$card\left(A\right)=6\times8=48$$

$$p\left(A\right)=\frac{48}{72}=\frac{2}{3}$$ أو مباشرة $\boxed{p\left(A\right)=\frac{2}{3}}$

الحدث B : **NR** أو **RR**

$$card\left(B\right)=3\times2+6\times3=24$$

$$p\left(B\right)=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$$ أو مباشرة

$$p\left(B\right)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$$

إذن: $\boxed{p\left(B\right)=\frac{1}{3}}$

الحدث $A\cap B$:" الأولى سوداء و الثانية حمراء "
NR

إذن: $P\left(A\cap B\right)=\frac{6\times3}{9\times8}$

و منه : $\boxed{P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}}$

نعلم أن : $P_A\left(B\right)=\frac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(A\right)}$

إذن: $P_A\left(B\right)=\frac{3}{8}$

ب- A و B غير مستقلان

لأن : $P\left(A\cap B\right)\neq P\left(A\right)\times P\left(B\right)$

أو لأن : $p_A\left(B\right)\neq p\left(B\right)$

ج- نعلم أن : $P_B\left(A\right)=\frac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(B\right)}$

إذن: $\boxed{P_B\left(A\right)=\frac{3}{4}}$

نعلم أن :
$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$

إذن: $\boxed{P\left(A\cup B\right)=\frac{3}{4}}$

نعلم أن : $P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left(B-A\right)$

و : $P\left(B-A\right)=P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$

إذن: $P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$

و منه : $\boxed{P\left(\overline{A}\cap B\right)=\frac{1}{12}}$

تمرين 12

يتكون مجتمع من 60% من الرجال و 40% من النساء

Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

20% من الرجال يتكلمون الأنجليزية و 10% من النساء يتكلمون الأنجليزية

اخترنا عشوائيا شخصا من هذا المجتمع

ما هو الاحتمال لكي يكون هذا الشخص

أ - رجلا و يتكلم الأنجليزية ؟

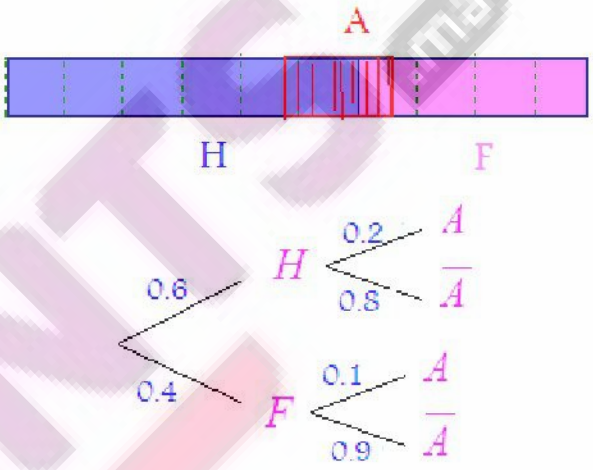
ب- رجلا و لا يتكلم الأنجليزية ؟

ج - امرأة و تتكلم الأنجليزية ؟

د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن يكون امرأة ؟

الحل

$(H\cap A)\cap(F\cap A)=\varnothing$ ، $A=(H\cap A)\cup(F\cap A)$



$p(H)=0.6$ رجل: H

$p(F)=0.4$ امرأة: F

A : أنجليزية

$P_H(A)=0.2$ ، $P_F(A)=0.1$

أ - رجل و يتكلم الأنجليزية : $p(A\cap H)$

$p(A\cap H)=P_H(A)\times p(H)=0.2\times 0.6=0.12$

$\boxed{p(A\cap H)=0.12}$

ب- رجل و لا يتكلم الأنجليزية : $p(\overline{A}\cap H)$

$p(\overline{A}\cap H)=P(H)-P(A\cap H)=0.6-0.12$

$\boxed{p(\overline{A}\cap H)=0.48}$

أو : $p(\overline{A}\cap H)=P_H(\overline{A})\times p(H)=0.8\times 0.6=0.48$

ج - امرأة و تتكلم الأنجليزية : $p(A\cap F)$

$p(A\cap F)=P_F(A)\times p(F)=0.1\times 0.4=0.04$

$\boxed{p(A\cap F)=0.04}$

د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن يكون امرأة ؟ : $P_A(F)$

$p(A)=p(H)p_H(A)+p(F)p_F(A)$

أو $p(A)=p(A\cap H)+p(A\cap F)$

$\boxed{p(A)=0.16}$

$P_A(F)=\dfrac{p(A\cap F)}{p(A)}=\dfrac{0.04}{0.16}$

$\boxed{P_A(F)=0.25}$

تمرين13

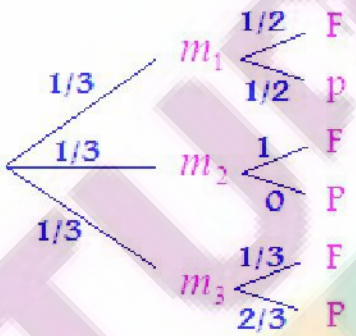
يحتوي صندوق على قطعة نقدية m_1 غير مغشوشة و قطعة m_2 سجل على وجهيها F و قطعة m_3 بحيث احتمال الحصول على الوجه F هو $\dfrac{1}{3}$

نسحب عشوائيا قطعة من الصندوق ثم نرميها

1- احسب احتمال الحصول على الوجه F

2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون القطعة المسحوبة هي m_3

الحل



$P(m_1)=P(m_2)=P(m_3)=\dfrac{1}{3}$

$P_{m_3}(F)=\dfrac{1}{3}$ ، $P_{m_2}(F)=1$ ، $P_{m_1}(F)=\dfrac{1}{2}$

1- $P(F)=P(m_1)P_{m_1}(F)+P(m_2)P_{m_2}(F)+P(m_3)P_{m_3}(F)$

$P(F)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{1}{3}\right)$

$\boxed{P(F)=\dfrac{11}{18}}$

Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com

www.students.com

2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون القطعة المسحوبة هي m_3 : $P_F(m_3)$

$$p_{m_3}(F)=\frac{p(m_3\cap F)}{p(m_3)}\Rightarrow p(m_3\cap F)=p_{m_3}(F)p(m_3)$$

$$\boxed{p(m_3\cap F)=\frac{1}{9}}$$

$$P_F(m_3)=\frac{p(m_3\cap F)}{p(F)}=\frac{1}{9}\times\frac{18}{11}$$

$$\boxed{P_F(m_3)=\frac{2}{11}}$$

تمرين14

يحتوي صندوق C_1 على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_2 على 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_3 على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء

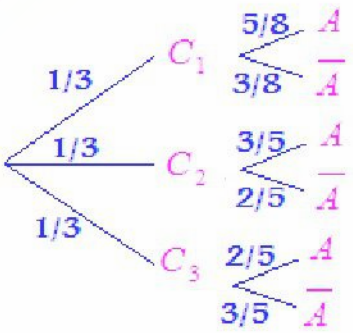
نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرتا

نفترض أن لجميع الصناديق و جميع الكرات نفس الاحتمال

1- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون من الصندوق C_2 ؟

الحل



نعتبر الحدث C_i: اختيار الصندوق C_i $1\le i\le 3$

$$1\le i\le 3\quad p(C_i)=\frac{1}{3}$$

1 - نعتبر الحدث A: الحصول على كرة بيضاء

$$p_{C_1}(A)=\frac{5}{8}\text{ و }p_{C_2}(A)=\frac{3}{5}\text{ و }p_{C_3}(A)=\frac{4}{10}$$

$$p(A)=p(C_1)p_{C_1}(A)+p(C_2)p_{C_2}(A)+p(C_3)p_{C_3}(A)$$

$$\boxed{p(A)=\frac{65}{120}}$$

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون من الصندوق C_2 : $P_A(C_2)$

$$p_{C_2}(A)=\frac{p(C_2\cap A)}{p(C_2)}\Rightarrow p(C_2\cap A)=p_{C_2}(A)p(C_2)$$

$$\boxed{p(C_2\cap A)=\frac{1}{5}}$$

$$P_A(C_2)=\frac{p(C_2\cap A)}{p(A)}=\frac{1}{5}\times\frac{120}{65}$$

$$\boxed{P_A(C_2)=\frac{24}{65}}$$

المتغيرات العشوائية

تمرين15

نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يظهر فيها الوجه P "

1- حدد $X(\Omega)$ ؛ $card\Omega$

2- حدد قانون احتمال X

3- احسب : $\sigma(X);V(X);E(X)$

4- حدد دالة التجزيئ ثم مثلها

الحل

1- $card\Omega=2^3=8$

$$\Omega=\{FFF;FFP;FPF;PFF;FPP;PFP;PPF;PPP\}$$

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

2- $(X=0)=\{FFF\}$ إذن : $P(X=0)=\frac{1}{8}$

$$(X=1)=\{FFP;FPF;PFF\}$$

إذن : $P(X=1)=\frac{3}{8}$

نجد : $P(X=2)=\frac{3}{8}$ ؛ $P(X=3)=\frac{1}{8}$

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

3- $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$

$$E(X)=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=\frac{1}{8}\times\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{8}\times\left(3-\frac{2}{3}\right)^2$$

Abouelouafa Lakhouaja

www.students.com