

المتتاليات

التمرين 1

تمرين :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

(1) تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$

(2) بين بالترجع لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

(3) بين أن (u_n) تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة

(4) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 1$

أ. باستعمال السؤال (1) بين أن (v_n) هندسية محدداً أساسها و حدّها الأول

ب. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ج. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التصحيح

(1) ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} - 1 \\ &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5-8}{8} \\ &= \frac{3}{8}u_n - \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{8}(u_n - 1) \end{aligned}$$

إذن نستنتج : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$

(2)

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2$ إذن $u_0 > 1$
- ليكن $n \in \mathbb{N}$
- ✓ نفترض أن : $u_n > 1$
- ✓ و نبين أن : $u_{n+1} > 1$
- حسب نتيجة السؤال (1) لدينا : $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$
- و حسب الافتراض ، لدينا $u_n > 1$
- إذن $u_n - 1 > 0$
- إذن $\frac{3}{8}(u_n - 1) > 0$
- و منه $u_{n+1} - 1 > 0$ أي $u_{n+1} > 1$
- نستنتج : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

(3)

- ليكن $n \in \mathbb{N}$
- $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} - u_n \\ &= \frac{3-8}{8}u_n + \frac{5}{8} \\ &= \frac{-5}{8}u_n + \frac{5}{8} \\ &= \frac{-5}{8}(u_n - 1) \end{aligned}$$
- حسب نتيجة السؤال (2) لدينا : $u_n > 1$ إذن $u_n - 1 > 0$ و منه $\frac{-5}{8}(u_n - 1) < 0$
- و بالتالي لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$
- نستنتج أن : (u_n) تناقصية قطعا .
- بما أن (u_n) تناقصية و مصغرة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة.

(4) أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{3}{8}(u_n - 1) \\ &= \frac{3}{8} \times v_n \end{aligned}$$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{3}{8} \times v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{8}$ و حده الأول v_0 حيث : $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

ب. ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{8}\right)^n \quad \blacksquare \text{ لدينا :}$$

$$v_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ إذن لكل}$$

$$\blacksquare \text{ لدينا : } v_n = u_n - 1 \text{ إذن } u_n = v_n + 1$$

$$u_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1 : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ ومنه لكل}$$

$$\text{ج. بما أن } -1 < \frac{3}{8} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$$

$$\text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1 = 1$$

$$\text{و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$