تمارين و حلول

تمرين1

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

ب/ أحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

3- نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

أحسب $I+J$ **و** $I-J$ **ثم استنتج** I **و** J

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{t+2-t}{t(t+2)}=\frac{1}{t(t+2)}$$

ب/ نحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)}dt=\int_1^2 \frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}dt=\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_1^2=\ln 2-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$$

2- نحسب $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

$$A=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\ldots\ldots\ldots$$

3- نضع $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

نحسب $I+J$

$$J+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

نحسب $I-J$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

اذن $I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $\quad I-J=\frac{-\pi}{4}$

نستنتج I و J

لدينا $I-J=\frac{-\pi}{4}$ و $I+J=\frac{\pi^3}{24}$ ومنه $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ و $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$

1- حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

2- أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f و أنشئ C_f

3- حدد المساحة A_k المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$; $x=k$ حيث k عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار $t=e^x$)

4- حدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$$

4- نحدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(1-e^x\right)=0$$

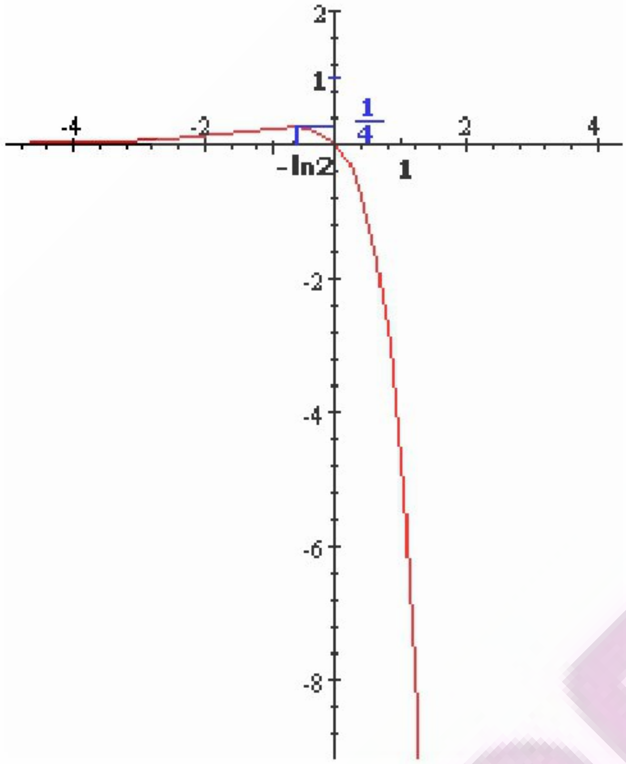
$$; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty$$

5- أنسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f و أنشئ C_f

$$f'(x)=\left[e^x-e^{2x}\right]'=e^x-2e^{2x}=e^x\left(1-2e^x\right)$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$



6- نحدد المساحة A_k

$$A_k = \int_k^0 f(x)\,dx = \int_k^0 e^x - e^{2x}\,dx$$

$$A_k = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k}$$

4- حدد $\lim\limits_{k \to -\infty} A_k$

$$\lim_{k \to -\infty} A_k = \lim_{k \to -\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k} = \frac{1}{2}$$

تمارين

تمرين1

1- حدد c ; b ; a حيث $\frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$

أحسب $\int_0^2 \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}dx$

2- أحسب $\int_0^1 \frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$

3- بين أن $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

أحسب $\int_0^x \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}dt$

تمرين2

1- باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$; $\int_0^1 x^2\ln\left(x^2+1\right)dx$ $\quad \int_0^{\ln 2}(x+2)e^{2x}dx$

و $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

2- حدد الدالة الأصلية لـ $x\to\sin^3 x$ التي تنعدم في0 على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 dx$

تمرين3

نعتبر $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$

1- أحسب I_1

2- بين $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ باستعمال المكاملة بالأجزاء.

3- أحسب I_2 $\quad I_3$

4- أستنتج $\int_0^1\left(x^3+2x^2-2x\right)e^x\,dx$

تمرين4

1- بين أن $1-x\le\frac{1}{1+x}\le 1$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

2- استنتج $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

3- استنتج تأطيرا لـ $\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx$ إلى 0,1.

تمرين9

1- تحقق أن $\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

2- نعتبر $k\in[0;1]$.

باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $A_k=\int_k^1\frac{2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

حدد $\lim A_k$

تمرين10

1- أ- تأكد أن $\frac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+1}$

ب- أحسب $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)}dt$

2- أحسب $\int_0^1\left(3x^2+2x+1\right)\ln\left(x+1\right)dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين11

1- تأكد أن $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

2- أحسب $I\left(\alpha\right)=\int_\alpha^1\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha\in\left]0;1\right[$

3- أحسب $\lim_{\alpha\to0^+}I(\alpha)$

تمرين12

نعتبر $n\in\mathbb{N}^*$ و $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$; $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx$

1- أحسب I_1 و استنتج I_3 ; I_5

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x\,dx$ و استنتج $I_{n+2}-I_n$ بدلالة n.

3- أ- بين أن الدالة $x\to\ln\left[tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ دالة أصلية للدالة $x\to\frac{1}{\cos x}$ على $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

ب- استنتج I_0 ثم I_2 ; I_4