www.students.com

2ع ت الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.الدالة اللوغاريتمية النبيرية :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري , ونرمز لها ب: ln

نتائـــــــــــج :

* الدالة ln معرفة, متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.
* الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

بتعبير اخر : لكل x و y من $]0,+\infty[$: $\ln x \prec \ln y \Leftrightarrow x \prec y$ و $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

خاصيات جبرية

لكل x و y من $]0,+\infty[$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ; \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^r = r\ln x \quad ; \quad \ln\frac{1}{y} = -\ln y$$

نهايـــــــات هامة :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n\in N^*) \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

مشتقة الدالة اللوغارتيمية النبيرية :

* الدالة ln قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا :

$$\forall x\in]0,+\infty[, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

* إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق و غير منعدمة على مجال I

فإن الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للإشتقاق على I

ولدينا : $\forall x\in I, \quad \left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

نتيجة :اذا كانت u قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على مجال I فان

الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ مع $\lambda \in R$

الدالة اللوغاريتمية للأساس a :

ليكن a عنصرا من $]0,1[\cup]1,+\infty[$. الدالة اللوغاريتمية للأساس a هي الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما $\forall x \succ 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

دالة اللوغاريتم للأساس 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و تكتب log .

2.الدالة الأسية النبيرية

التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النبيري ln تسمى الدالة الأسية النبيرية ونرمز لها بالرمز : exp .

نتائـــــــــــج :

* الدالة exp معرفة ، متصلة وتزايدية قطعا على R
* لكل x و y من R : $exp(x) \prec exp(y) \Leftrightarrow x \prec y$
$exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y$
* لكل x من R : $ln(exp(x)) = x$
* لكل x من $]0;+\infty[$: $exp(\ln x) = x$
* لكل x من R : $exp(x) \succ 0$
* $exp(0) = 1$ و $exp(1) = e$
* لكل x من R : $exp(x) = e^x$



خاصيات جبرية

لكل x و y من R لكل r من Q :

$$e^{x+y} = e^x.e^y \quad ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

النهايات الاعتيادية : $(n\in N^*)$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

مشتقة الدالة $x \mapsto e^x$:

*الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على R و $(\forall x\in R) : (e^x)' = e^x$

*اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R

فان : $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا

$$(\forall x\in I) : \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$$

نتيجة :اذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال الاصلية للدالة

$x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ على المجال I هي الدوال المعرفة على I

بما يلي : $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ مع $\lambda \in R$

www.students.com