المرجـــــح

تمرين 1

A و B نقطتان مختلفتان. أنشئ النقط التالية : (أنشئ أشكالا مستقلة)

-1 G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

-2 E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-1)$ و $(B,3)$

-3 K مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-1)$ و $(B,2)$

-4 I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,100)$ و $(B,100)$

تمرين 2

A و B و C نقط غير مستقيمية. لتكن G مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

-1 اكتب $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ ثم أنشئ النقطة G

-2 باستعمال تجميعية المرجح أنشئ النقطة G

تمرين 3

ABC مثلث.

-1 أنشئ G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

-2 ماذا تمثل G بالنسبة للمثلث ABC ؟

تمرين 4

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O .

بين أن O هو مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

تمرين 5

A و B نقطتان مختلفتان. ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

-1 بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-3)$ و $(B,1)$

-2 بين أن B مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-6)$ و $(A,4)$

تمرين 6

A و B نقطتان مختلفتان.

-1 أنشئ E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,3)$ و $(B,-1)$

-2 أنشئ F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,-3)$

-3 بين أن القطعتين $[AB]$ و $[EF]$ لهما نفس المنتصف .

تمرين 7

ABC مثلث حيث $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$

-1 أنشئ النقط :

I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$

J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

-2 أنشئ G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$

-3 بين أن المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

تمرين 8

ABC مثلث. نعتبر النقطتين E و D حيث : $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

1- عبر عن D كمرجح للنقطتين A و B

2- عبر عن E كمرجح للنقطتين C و D

3- بين أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة : $\{(A,2);(B,1);(E,6)\}$

4- لتكن H مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(E,3)$.

بين أن النقط B و C و H مستقيمية .

تمرين 9

ABC مثلث. لتكن O منتصف $[BC]$ و لتكن H مرجح النظمة المتزنة $\{(C,2);(B,2);(A,-1)\}$

1- بين أن $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$ ثم أنشئ النقطة H

2- لتكن G مركز ثقل المثلث ABC . بين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$

تمرين 10

$ABCD$ متوازي أضلاع .

لتكن E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$ و F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$

3-ماذا تستنتج ؟

تمرين 11

ABC مثلث.

لتكن E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$ و F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن $(CF)//(AE)$

تمرين 12

$ABCD$ رباعي محدب . ليكن E و F هما على التوالي مركزا ثقلي المثلثين ABC و ADC

◈ بين أن $(EF)//(BD)$

تمرين 13

ABC مثلث. E و I و F نقط حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ و I منتصف $[BC]$ و $\overrightarrow{CF}=\frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$

1- عبر عن E و I و F كمرجح للنقط A ، B أو C

2- برهن أن النقط E و I و F مستقيمية.

تمرين 14

المستوى منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط $A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$.

ليكن E منتصف $[BC]$ و G مرجح النقطتين المتزنتين $(E,2)$ و $(A,1)$

1- أوجد إحداثيتي كل من E و G

2- استنتج أن النقط O و G و C مستقيمية.

تمرين 15

ABC مثلث .

1-حدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{AM}\|=\|\overrightarrow{BC}\|$ ثم أنشئها .

2-حدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{BM}\|=\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|$ ثم أنشئها .

تمرين 16

ABC **مثلث حيث** $AB=6$ **و** $AC=4$ **و** $BC=5$. G **مركز ثقل المثلث** ABC .

1-حدد و أنشئ (ζ) **مجموعة النقط** M **التي تحقق :** $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$.

2-حدد و أنشئ (Δ) **مجموعة النقط** M **التي تحقق :** $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

3-حدد و أنشئ (L) **مجموعة النقط** M **التي تحقق :** $\left\|\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

المرجـــح

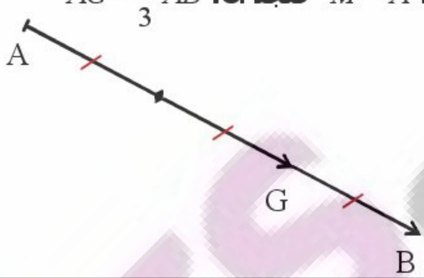
تمرين 1

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



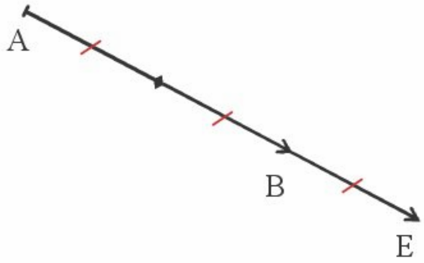
: إذا أخذنا : $M=B$ سنجد أن $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ، لكننا سنجد G في نفس الموضع

E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-1)$ و $(B,3)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

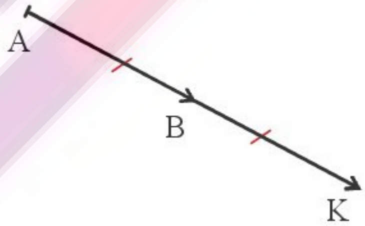


K مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-1)$ و $(B,2)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

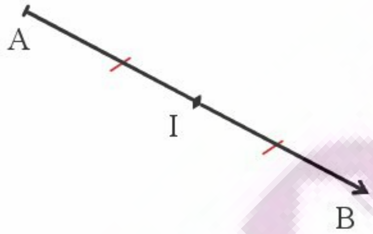
$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MK}=\frac{-1}{1}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{1}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$



I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,100)$ و $(B,100)$

بما أن المعاملان متساويان إذن I منتصف القطعة $[AB]$



: مرجح نقطتين لهما نفس المعامل هو منتصف القطعة التي تصلهما

: لإيجاد علاقة متجهية تسمح بالإنشاء يمكن أيضا استعمال تعريف المرجح، لكن هذه الطريقة تتطلب في الغالب استعمال علاقة شال للحصول على المتساويات السابقة.

تمرين 2

1

لدينا G مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

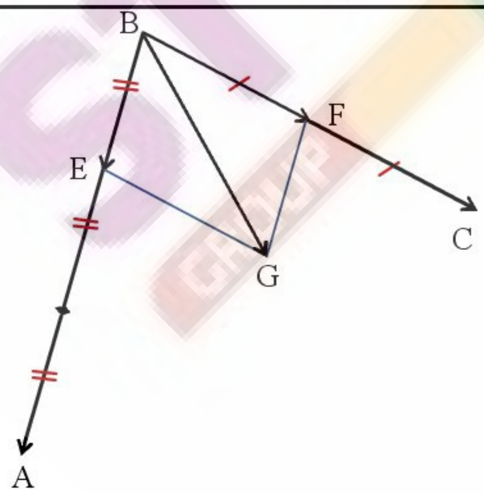
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{2}{6}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{GB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{GC}$$

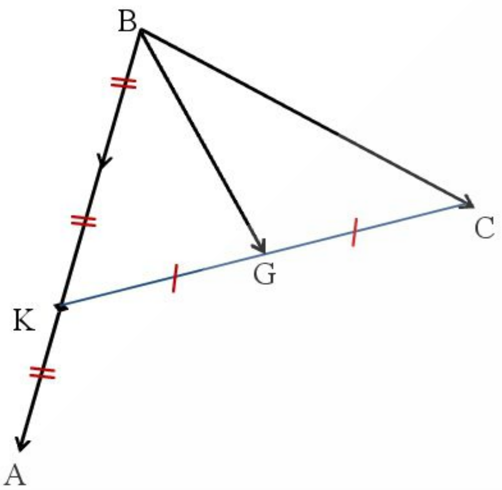
نأخذ : $M=B$ فنجد : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

: لأجل الإنشاء أنشأنا أولا النقطة E حيث $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ثم النقطة F حيث $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ثم أنشأنا G حيث :

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}$ أي $BEGF$ متوازي الأضلاع



تمرين 2



لتكن K مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$

2 بما أن G مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح $(K,3)$ و $(C,3)$

أي منتصف $[CK]$

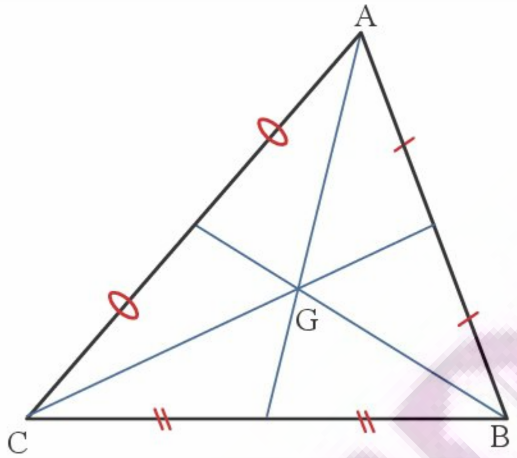
لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ : $M = B$ فنجد : $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

: لاحظ أنه رغم اختلاف الطريقتين إلا أن موضع النقطة G لا يتغير.

تمرين 3



بما أن G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

فإن G تمثل مركز ثقل المثلث ABC أي نقطة تقاطع متوسطاته

: مرجح ثلاث نقط لها نفس المعامل يكون هو مركز ثقل المثلث الذي رؤوسه هذه النقط.

تمرين 4

لنبين أن بين أن O هو مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

أي لنبين أن: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

لدينا : $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O إذن O هي منتصف قطريه $[AC]$ و $[BD]$

منه : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ بالتالي : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

: الشكل غيرضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.

تمرين 5

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

1 بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-3)$ و $(B,1)$ أي نبين : $-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ منه $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

منه : $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ بالتالي : $-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

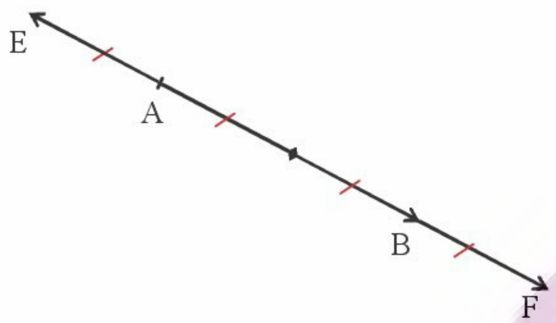
2 بين أن B مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-6)$ و $(A,4)$ أي نبين : $-6\overrightarrow{BG}+4\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ منه $2\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

منه : $2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ منه $3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ منه $-3\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ بالتالي : $-6\overrightarrow{BG}+4\overrightarrow{BA}=2\vec{0}=\vec{0}$

: الشكل غيرضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.

تمرين 6



1 لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,3)$ و $(B,-1)$ ،
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{-1}{2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

2 لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,-3)$ ،
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{1}{-2}\overrightarrow{MA}+\frac{-3}{-2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

3 لتكن : I منتصف $[AB]$ و لنبين أن I هي أيضا منتصف $[EF]$ أي لنبين أن $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$

<u>الطريقة الأولى:</u>

لدينا : $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{IA}+\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف .

<u>الطريقة الثانية:</u>

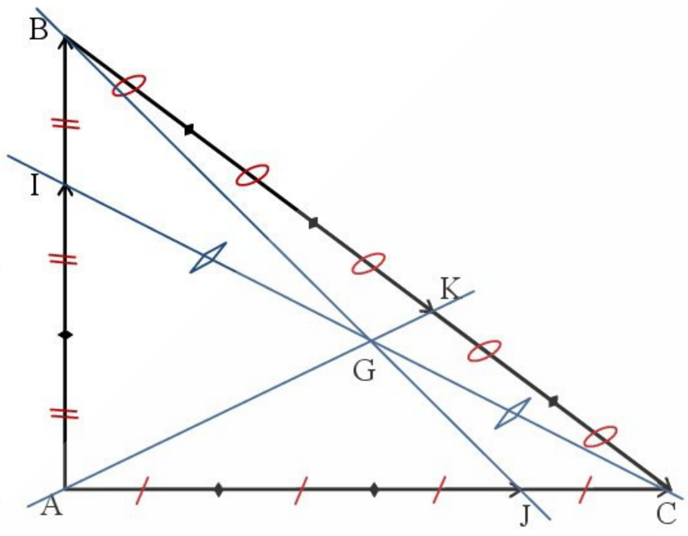
باستعمال الخاصية المميزة للمرجح بالنسبة لـ $M=I$ المستعملة في السؤالين السابقين نجد أن:

$\overrightarrow{IE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IA}+\frac{-1}{2}\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{IA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{IB}$ منه : $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{IA}+\left(\frac{3}{2}+\frac{-1}{2}\right)\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف .

: الخاصية المميزة للمرجح مفيدة في إنشاء المرجح و في كثير من البراهين.

تمرين 7



1

لدينا I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

لدينا J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

لدينا K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

2

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$

3

بين أن المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G\in(BJ)$

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G\in(AK)$

و حسب السؤال السابق $G\in(IC)$

بالتالي : المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

: خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامية لأن مرجح نقطتين تكون مستقيمية مع هتين النقطتين.