السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	المتتاليـــات العددية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : ادرس رتابة المتتاليات التالية :

$\forall n\in IN\ u_n=\dfrac{2n}{n+1}$ ، لدينا لكل $n\in IN$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)}{n+2}-\frac{2n}{n+1}=2\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)=2\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=2\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}$$

$$=2\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$$

إذن (u_n) تزايدية

$\forall n\in IN^*\ v_n=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$ ، لدينا لكل $n\in IN^*$

$$v_{n+1}-v_n=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}>0$$

إذن (v_n) تزايدية

$\forall n\in IN\ w_n=\dfrac{n+1}{3^n}$ ، لدينا لكل $n\in IN$

$$w_{n+1}-w_n=\frac{n+2}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}=\frac{n+2-3(n+1)}{3^{n+1}}=\frac{n+2-3n-3}{3^{n+1}}=\frac{-2n-1}{3^{n+1}}<0$$

إذن (w_n) تناقصية

$\forall n\in IN^*\ w_n=n^3-n$ ، لدينا لكل $n\in IN^*$

$$w_{n+1}-w_n=(n+1)^3-(n+1)-(n^3-n)=n^3+3n^2+3n+1-n-1-n^3+n=3n^2+3n>0$$

إذن (w_n) تزايدية

$\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=u_n^2-u_n+1\end{cases}$ ، لدينا لكل $n\in IN$ ، $u_{n+1}-u_n=u_n^2-u_n+1-u_n=u_n^2-2u_n+1=(u_n-1)^2\geq 0$

إذن (u_n) تزايدية

تمرين 2 : (u_n) متتالية حسابية ، $u_0=2$ ، $r=3$

1 لدينا : $\boxed{u_7=u_0+7r=2+21=23}$ و $\boxed{u_{11}=u_0+11r=2+33=35}$

2 $$\boxed{S=u_0+u_1+...+u_{99}=\frac{u_0+u_{99}}{2}\times 100=100\times\frac{2+u_0+99r}{2}=50(2+2+297)=50\times 301=15050}$$

100 تمثل عدد الحدود $(99-0+1=100)$

تمرين 3 : (u_n) متتالية حسابية ، $u_0=-1$.

1 نعلم أن : $u_{10}=u_0+10r$ منه : $u_{10}-u_0=10r$ منه : $\boxed{r=\dfrac{u_{10}-u_0}{10}=\dfrac{59-(-1)}{10}=\dfrac{60}{10}=6}$

2 $$\boxed{S=u_3+u_4+...+u_{22}=\frac{u_3+u_{22}}{2}\times 20=20\times\frac{u_0+3r+u_0+22r}{2}=10(-1+18-1+132)=10\times 148=1480}$$

تمرين 4 : (u_n) متتالية حسابية ، u_0 ، r

1 نعلم أن : $u_3=u_0+3r$ منه : $u_0+3r=12$ ، ونعلم أن : $u_{17}=u_0+17r$ منه : $u_0+17r=82$

نحصل على النظمة :

$\begin{cases} u_0+3r=12 \\ u_0+17r=82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=12-3r \\ 12-3r+17r=82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=12-3r \\ 14r=82-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=12-3\times5 \\ r=\dfrac{70}{14}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0=-3 \\ r=5 \end{cases}$	
$\boxed{S=u_0+u_4+...+u_n=\dfrac{u_0+u_n}{2}\times(n+1)=(n+1)\times\dfrac{u_0+u_0+rn}{2}=(n+1)\times\dfrac{-3-3+5n}{2}=\dfrac{(n+1)(5n-6)}{2}}$	2
$n+1$ تمثل عدد الحدود $(n-0+1=n+1)$	
تمرين 5 : (u_n) متتالية هندسية ، $u_0=3$ ، $r=2$	
لدينا : $\boxed{u_3=u_0\times r^3=3\times2^3=3\times8=24}$ و $\boxed{u_6=u_0\times r^6=3\times2^6=3\times64=192}$	1
$\boxed{S=u_0+u_1+...+u_5=u_0\times\dfrac{1-r^6}{1-r}=3\times\dfrac{1-2^6}{1-2}=3\times\dfrac{1-64}{-1}=3\times63=189}$	2
u_0 تمثل أول حدود المجموع S و 6 تمثل عدد الحدود $(5-0+1=6)$	
تمرين 6 : (u_n) هندسية ، $r=\dfrac{1}{2}$.	
لدينا : $u_3=u_0\times r^3$ منه $\boxed{u_0=\dfrac{u_3}{r^3}=\dfrac{\frac{5}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{8}}=5}$	1
$\boxed{S=u_1+u_2+...+u_n=u_1\times\dfrac{1-r^n}{1-r}=(u_0\times r^1)\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=5\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=5\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}$	2
u_1 تمثل أول حدود المجموع S و n عدد الحدود $(n-1+1=n)$	

تحليلية الجذاء السلمي

تمرين 1

المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(-1,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-4,4)$ و $D(1,1)$ و $E(-4,-2)$

1- أحسب: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}$ ، ماذا تستنتج ؟

2- بين أن : $(BE)\perp(CD)$

3- بين أن: $(AM)\perp(BC)$ حيث M منتصف $[DE]$

تمرين 2

المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(1\,;\,1)$ و $B(1\,;\,3)$ و $C(-1\,;1)$ و $D\left(0\,;\,1+\sqrt{3}\right)$

1- بين أن ABC مثلث قائم الزاوية في A

2- أ- أحسب : $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$

ب- أحسب : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$

ج- أحسب : $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ و $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$

د- استنتج قياسي الزاويتين : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ و $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$

3- تحقق أن: $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\pi}{12}$

4- استنتج حساب: $Cos\dfrac{\pi}{12}$ و $Sin\dfrac{\pi}{12}$

تمرين 3

المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

1- أنشئ النقط A و B و C

2-

أ- أوجد معادلة المستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC).

ب- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

ج- حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)

3- احسب $\cos\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)$

4- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (L) و اسط القطعة $[AB]$

تمرين 4

المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A\left(1,2\sqrt{3}\right)$ و $B\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $C(1,0)$

1- بين أن ABC متساوي الساقين في النقطة B

2- أحسب : $Cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ و $\tan\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

3- حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC

4- حدد معادلة ديكارتية للمتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC

5- حدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC

6- احسب مساحة المثلث ABC

7- أ- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)

ب- أحسب مسافة A عن المستقيم (BC)

تمرين 5

المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر المستقيم: (D) المار من $A(-1\,;0)$ حيث $\vec{u}(2\,;4)$ منظمية عليه و نعتبر المستقيم $(\Delta):2x=y+4$

1- حدد معادلة ديكارتية لـ (D)

2- بين أن $(\Delta)\perp(D)$

3- حدد مسافة النقطة A عن (Δ)

4- أوجد إحداثيتي H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

5- أحسب بطريقة أخرى مسافة النقطة A عن (Δ)

تمرين 6

المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(1\,;-2)$ و $B(2\,,0)$ و $C(-1\,,-4)$

- أوجد إحداثيتي H مركز تعامد المثلث ABC

تحليلية الجذاء السلمي
حلــول

تمرين 1

$E(-4,-2)$ و $D(1,1)$ و $C(-4,4)$ و $B(-1,3)$ و $A(-1,1)$

1

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ و $\overrightarrow{AD}(x_D - x_A ; y_D - y_A)$

$\overrightarrow{AB}(0 ; 2)$ و $\overrightarrow{AD}(2 ; 0)$

منه : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0\times 2 + 0\times 2 = 0 + 0 = 0}$

نستنتج إذن أن: $\boxed{(AB)\perp(AD)}$

و أيضا : $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B ; y_C - y_B)$ و $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D ; y_E - y_D)$

$\overrightarrow{BC}(-3 ; 1)$ و $\overrightarrow{DE}(-5 ; -3)$

منه : $\boxed{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = (-3)\times(-5) + 1\times(-3) = 15 + (-3) = 12}$

2

لدينا $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C ; y_D - y_C)$ و $\overrightarrow{BE}(x_E - x_B ; y_E - y_B)$

$\overrightarrow{CD}(5 ; -3)$ و $\overrightarrow{BE}(-3 ; -5)$

منه : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD} = -3\times 5 + (-5)\times(-3) = -15 + 15 = 0$ بالتالي : $\boxed{(BE)\perp(CD)}$

3

لدينا M منتصف $[DE]$ إذن :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_D + x_E}{2} = \dfrac{-3}{2} \\ y_M = \dfrac{y_D + y_E}{2} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

إذن : $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B ; y_C - y_B)$ و $\overrightarrow{AM}(x_M - x_A ; y_M - y_A)$

$\overrightarrow{BC}(-3 ; 1)$ و $\overrightarrow{AM}\left(\dfrac{-1}{2} ; \dfrac{-3}{2}\right)$

منه : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = -3\times\left(\dfrac{-1}{2}\right) + 1\times\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0$ بالتالي: $\boxed{(AM)\perp(BC)}$

: لإثبات تعامد نبرهن أن الجذاء السلمي منعدم.

تمرين 2

$A(1\,;1)$ و $B(1\,;3)$ و $C(-1\,;1)$ و $D(0\,;1+\sqrt{3})$

1 لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$ و $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A)$

$\overrightarrow{AB}(0\,;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;0)$ منه : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\times(-2)+0\times 2=0+0=0}$

نستنتج إذن أن: $\boxed{(AB)\perp(AC)}$ بالتالي ABC مثلث قائم الزاوية في A

2

أ لدينا $\overrightarrow{CA}(2\,;0)$ و $\overrightarrow{CB}(x_B-x_C\,;y_B-y_C)$ و $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,;y_D-y_C)$

$\overrightarrow{CB}(2\,;2)$ و $\overrightarrow{CD}(1\,;\sqrt{3})$

إذن: $\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{2^2+0^2}=\sqrt{4}=2$ و $\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

و $\|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

ب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=2\times 2+0\times 2=4$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=2\times 1+0\times\sqrt{3}=2$

ج

$$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|}=\frac{4}{2\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ و $$\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\det(\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB})}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|}=\frac{\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}}{2\times 2\sqrt{2}}=\frac{4-0}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{2}{2\times 2}=\frac{1}{2}$$ و $$\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\det(\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{\begin{vmatrix}2&0\\1&\sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{3}-0}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

د بما أن : $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

و بما أن : $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

3 لدينا :

$$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=-(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}\,[2\pi]$$

4

$$Cos\frac{\pi}{12}=Cos(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\frac{\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CB}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{2\times 1+2\times\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$Sin\frac{\pi}{12}=Sin(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\frac{\det(\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CB}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{\begin{vmatrix}2&2\\1&\sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

: يمكن تحديد قيلس زاوية و ذلك بحساب جيبها و جيب تمامها.

تمرين 3

$A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

2

أ لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى.

لدينا : $\overrightarrow{BM}(x+1\ ;\ y-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;-3)$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -2(x+1)-3(y-1)=0\Leftrightarrow -2x-2-3y+3=0\Leftrightarrow -2x-3y+1=0$$

بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ -2x-3y+1=0}$ أو أيضا : $\boxed{(\Delta):\ 2x+3y-1=0}$

ب لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى.

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2\ ;\ y-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;-3)$

$$M\in(AC)\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2\\ -2 & -3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -3(x-2)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+6+2y-4=0\Leftrightarrow -3x+2y+2=0$$

بالتالي : $\boxed{(AC):\ -3x+2y+2=0}$ أو أيضا : $\boxed{(AC):\ 3x-2y-2=0}$

ج حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)

إذن لنحل النظمة المكونة من معادلتي (Δ) و (AC) ، أي : $\begin{cases}2x+3y=1\\ 3x-2y=2\end{cases}$

لدينا المحددة هي: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4-9=-13$ و $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2-6=-8$

و $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1$ ، منه: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{8}{13}$ و $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-1}{13}$ بالتالي: $\boxed{H\left(\frac{8}{13}\ ;\frac{-1}{13}\right)}$

3

لدينا : $\overrightarrow{CA}(\ 2\ ;\ 3\ )$ و $\overrightarrow{CB}(\ -1\ ;\ 2\ )$ إذن: $\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ و $\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|}=\frac{-2+6}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$$

4

لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (L) و اسط القطعة $[AB]$

نعتبر K منتصف $[AB]$ ، إذن : $K\left(\frac{2+(-1)}{2}\ ;\frac{2+1}{2}\right)$ أي : $K\left(\frac{1}{2}\ ;\frac{3}{2}\right)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3\ ;-1)$ و $\overrightarrow{KM}\left(x-\frac{1}{2}\ ;\ y-\frac{3}{2}\right)$

$$M\in(L)\Leftrightarrow \overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow -3\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(y-\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow -3x+\frac{3}{2}-y+\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow -3x-y+3=0$$

بالتالي : $\boxed{(L):3x+y-3=0}$

: لإيجاد إحداثيتي نقطة تقاطع مستقيمين نحل النظمة المكونة من معادلتيهما الديكارتيتين

و لإيجاد معادلة ديكارتية لواسط قطعة نحدد أولا إحداثيتي منتصف هذه القطعة فيكون الواسط مستقيما مارا بهذه النقطة و تكون المتجهة التي طرفاها هما طرفي القطعة منظمية عليه . . .

يستحسن جعل معامل x موجبا في معادلة مستقيم و ذلك بضرب جميع المعاملات في -1

تمرين 4

$A\left(1,2\sqrt{3}\right)$ و $B\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $C(1,0)$

1	لدينا : $\overrightarrow{BA}\left(1\ ;\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1\ ;-\sqrt{3}\right)$ إذن: $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\sqrt{1+3}=2$ و $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{1+3}=2$ بالتالي : ABC متساوي الساقين في النقطة B
2	$\boxed{\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\dfrac{1-3}{2\times 2}=\dfrac{-1}{2}}$ و $\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & \sqrt{3}\\ 1 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\times 2}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ منه: $\boxed{\tan\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{-1}=\sqrt{3}}$
3	ليكن (Δ) الارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC إذن (Δ) يمر من B و عمودي على (AC) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. $\overrightarrow{AC}\left(0\ ;-2\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{BM}\left(x\ ;y-\sqrt{3}\right)$ $M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 0\times x-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0$ $\Leftrightarrow\ y-\sqrt{3}=0$ بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ y-\sqrt{3}=0}$
4	ليكن E منتصف $[AB]$ ، إذن المتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC هو المستقيم (EC) لنحدد إذن لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (EC) ، لدينا : $E\left(\dfrac{1}{2}\ ;\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا : $\overrightarrow{CM}\left(x-1\ ;\ y\right)$ و $\overrightarrow{EC}\left(\dfrac{1}{2}\ ;-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $M\in(EC)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{EC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}y=0$ $\Leftrightarrow-3\sqrt{3}(x-1)+y=0\Leftrightarrow-3\sqrt{3}\,x+y-3\sqrt{3}=0$ بالتالي : $\boxed{(EC):\ 3\sqrt{3}\,x-y+3\sqrt{3}=0}$
5	لنحدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC ، نعلم أن : $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\sqrt{3}\end{cases}$ منه: $\boxed{G\left(\dfrac{2}{3}\ ;\sqrt{3}\right)}$

للتذكير : ارتفاع مثلث هو مستقيم يمر من أحد رؤوسه و عمودي على حامل الضلع المقابل لهذا الرأس، أما المتوسط فهو مستقيم يمر من أحد رؤوسه و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.