

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	تحليلية الجداء السلمي	سلسلة 1
تمرين 1 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط : $A(-1,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-4,4)$ و $D(1,1)$ و $E(-4,-2)$ 1) أحسب: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE}$، ماذا تستنتج؟ 2) بين أن: $(BE) \perp (CD)$ 3) بين أن: $(AM) \perp (BC)$ حيث M منتصف $[DE]$		
تمرين 2 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط: $A(1; 1)$ و $B(1; 3)$ و $C(-1; 1)$ و $D(0; 1+\sqrt{3})$ 1) بين أن ABC مثلث قائم الزاوية في A 2) أ) أحسب: $\ \overrightarrow{CA}\$ و $\ \overrightarrow{CB}\$ و $\ \overrightarrow{CD}\$ ب) أحسب: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 3) أ) أحسب: $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ و $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ و $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ و $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ ب) استنتج قياس الزاويتين: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$ 4) تحقق أن: $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{12}$ 5) استنتج حساب: $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$		
تمرين 3 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط: $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$ 1) أ) أنشئ النقط A و B و C 2) أ) أوجد معادلة المستقيم (Δ) المار من B والعمودي على (AC). ب) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC) ج) حدد زوج إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (AC) 3) احسب $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ 4) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (L) واسط القطعة $[AB]$		
تمرين 4 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط: $A(1, 2\sqrt{3})$ و $B(0, \sqrt{3})$ و $C(1, 0)$ 1) بين أن ABC متساوي الساقين في النقطة B 2) أحسب: $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ و $\tan(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ 3) حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC 4) حدد معادلة ديكارتية للمتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC 5) حدد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC 6) احسب مساحة المثلث ABC 7) أ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC) ب) احسب مسافة A عن المستقيم (BC)		

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	تحليلية الجداء السلمي حلول مقترحة	سلسلة 1
تمرين 1: $A(-1,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-4,4)$ و $D(1,1)$ و $E(-4,-2)$		
1	لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ و $\overrightarrow{AD}(x_D - x_A; y_D - y_A)$ $\overrightarrow{AB}(0; 2)$ و $\overrightarrow{AD}(2; 0)$ نستنتج إذن أن: $(AB) \perp (AD)$ وأيا: $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D)$ و $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$ $\overrightarrow{DE}(-5; -3)$ و $\overrightarrow{BC}(-3; 1)$ منه: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE} = (-3) \times (-5) + 1 \times (-3) = 15 + (-3) = 12$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0 + 0 = 0$ منه:
2	لدينا: $\overrightarrow{BE}(x_E - x_B; y_E - y_B)$ و $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C)$ $\overrightarrow{BE}(-3; -5)$ و $\overrightarrow{CD}(5; -3)$ منه: $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} = -3 \times 5 + (-5) \times (-3) = -15 + 15 = 0$ بالتالي: $(BE) \perp (CD)$	
3	لدينا M منتصف $[DE]$ إذن: $\begin{cases} x_M = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{-3}{2} \\ y_M = \frac{y_D + y_E}{2} = \frac{-1}{2} \end{cases}$ إذن: $\overrightarrow{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A)$ و $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$ $\overrightarrow{AM}(\frac{-1}{2}; \frac{-3}{2})$ و $\overrightarrow{BC}(-3; 1)$ منه: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = -3 \times (\frac{-1}{2}) + 1 \times (\frac{-3}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$ بالتالي: $(AM) \perp (BC)$	
لإثبات التعامد نبرهن أن الجداء السلمي منعدم.		
تمرين 2: $A(1; 1)$ و $B(1; 3)$ و $C(-1; 1)$ و $D(0; 1 + \sqrt{3})$		
1	لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ و $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A)$ $\overrightarrow{AB}(0; 2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; 0)$ نستنتج إذن أن: $(AB) \perp (AC)$ بالتالي ABC مثلث قائم الزاوية في A	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 0 \times 2 = 0 + 0 = 0$ منه:
2	لدينا $\overrightarrow{CA}(x_A - x_C; y_A - y_C)$ و $\overrightarrow{CB}(x_B - x_C; y_B - y_C)$ و $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C)$ $\overrightarrow{CA}(2; 0)$ و $\overrightarrow{CB}(2; 2)$ و $\overrightarrow{CD}(1; \sqrt{3})$ إذن: $\ \overrightarrow{CA}\ = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$ و $\ \overrightarrow{CB}\ = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و $\ \overrightarrow{CD}\ = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$	
	(ب) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 1 + 0 \times \sqrt{3} = 2$ و $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \times 2 + 0 \times 2 = 4$	
3	إذن: $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}{\ \overrightarrow{CA}\ \ \overrightarrow{CB}\ } = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{4 - 0}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\ \overrightarrow{CA}\ \ \overrightarrow{CB}\ } = \frac{4}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	

$$\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CA}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{2 \times 2} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CA}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

بما أن: $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

و بما أن: $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

لدينا: $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} [2\pi]$ 4

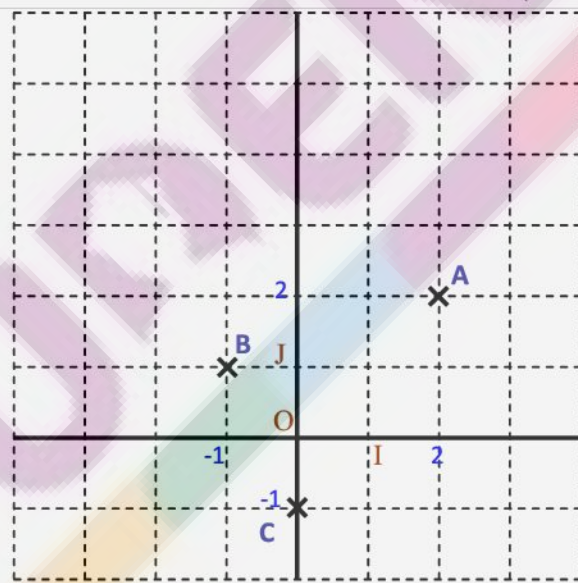
$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CB}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{2 \times 1 + 2 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CB}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - 1) \times \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

5

يمكن تحديد قياس زاوية وذلك بحساب جيبها وجيب تمامها.

تمرين 3: $A(2, 2)$ و $B(-1, 1)$ و $C(0, -1)$



1

لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من B والعمودي على (AC) .

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى، لدينا: $\overrightarrow{BM}(x+1; y-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; -3)$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -2(x+1) - 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y + 1 = 0$$

بالتالي: $(\Delta): -2x - 3y + 1 = 0$ أو أيضا: $(\Delta): 2x + 3y - 1 = 0$

لنحدد حد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى، لدينا: $\overrightarrow{AM}(x-2; y-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; -3)$

$$M \in (AC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(x-2) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 6 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + 2 = 0$$

بالتالي: $(AC): -3x + 2y + 2 = 0$ أو أيضا: $(AC): 3x - 2y - 2 = 0$

2

ب)

	حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC) إذن لنحل النظام المكونة من معادلتين (Δ) و (AC)، أي: $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ لدينا المحددة هي: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2-6 = -8$ و $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4-9 = -13$ (ج) و $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$ ، منه: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{13}$ و $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{13}$ بالتالي: $H\left(\frac{8}{13}; \frac{-1}{13}\right)$	
	لدينا: $\vec{CA}(2; 3)$ و $\vec{CB}(-1; 2)$ إذن: $\ \vec{CA}\ = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ و $\ \vec{CB}\ = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ $\cos(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\ \vec{CA}\ \ \vec{CB}\ } = \frac{-2+6}{\sqrt{13} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$	3
	لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (L) واسط القطعة $[AB]$ نعتبر K منتصف $[AB]$، إذن: $K\left(\frac{2+(-1)}{2}; \frac{2+1}{2}\right)$ أي: $K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى. لدينا: $\vec{AB}(-3; -1)$ و $\vec{KM}\left(x-\frac{1}{2}; y-\frac{3}{2}\right)$ $M \in (L) \Leftrightarrow \vec{KM} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow -3\left(x-\frac{1}{2}\right) - \left(y-\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -3x + \frac{3}{2} - y + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3x - y + 3 = 0$ بالتالي: $(L): 3x + y - 3 = 0$	4
لايجاد إحداثيتي نقطة تقاطع مستقيمين نحل النظام المكونة من معادلتيهما الديكارتيتين لايجاد معادلة ديكارتية لواسط قطعة نحدد أولاً إحداثيتي منتصف هذه القطعة فيكون الواسط مستقيماً ماراً بهذه النقطة و تكون المتجهة التي طرفاها هما طرفي القطعة منظمية عليه... يستحسن جعل معامل x موجبا في معادلة مستقيم وذلك بضرب جميع المعاملات في -1		
تمرين 4: $A(1, 2\sqrt{3})$ و $B(0, \sqrt{3})$ و $C(1, 0)$		
	لدينا: $\vec{BA}(1; \sqrt{3})$ و $\vec{BC}(1; -\sqrt{3})$ إذن: $\ \vec{BA}\ = \sqrt{1+3} = 2$ و $\ \vec{BC}\ = \sqrt{1+3} = 2$ بالتالي: ABC متساوي الساقين في النقطة B	1
	$\sin(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\det(\vec{BA}, \vec{BC})}{\ \vec{BA}\ \ \vec{BC}\ } = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}{2 \times 2} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $\cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\ \vec{BA}\ \ \vec{BC}\ } = \frac{1-3}{2 \times 2} = \frac{-1}{2}$ منه: $\tan(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\sin(\vec{BA}, \vec{BC})}{\cos(\vec{BA}, \vec{BC})} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}$	2
	ليكن (Δ) الارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC إذن (Δ) يمر من B و عمودي على (AC) لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى. لدينا: $\vec{AC}(0; -2\sqrt{3})$ و $\vec{BM}(x; y-\sqrt{3})$ $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{BM} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow 0 \times x - 2\sqrt{3}(y-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}(y-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow y-\sqrt{3} = 0$ بالتالي: $(\Delta): y - \sqrt{3} = 0$	3
	ليكن E منتصف $[AB]$، إذن المتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC هو المستقيم (EC)	4

	لنحدد إذن لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (EC)، لدينا: $E\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى، لدينا: $\overrightarrow{CM}(x-1; y)$ و $\overrightarrow{EC}\left(\frac{1}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $M \in (EC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{EC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{2}y = 0$ $\Leftrightarrow -3\sqrt{3}(x-1) + y = 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$ بالتالي: $(EC): 3\sqrt{3}x - y + 3\sqrt{3} = 0$	
5	لنحدد إحداثياتي G مركز ثقل المثلث ABC، نعلم أن: $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$ منه: $G\left(\frac{2}{3}; \sqrt{3}\right)$	
6	مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC} = \frac{ \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) }{2}$ ولدينا: $\overrightarrow{AB}(-1; -\sqrt{3})$ و $\overrightarrow{AC}(0; -2\sqrt{3})$ $S_{ABC} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix}}{2} = \frac{ 2\sqrt{3} }{2} = \sqrt{3}$ منه:	
7	لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)، لتكن $M(x, y)$ نقطة من المستوى. لدينا: $\overrightarrow{CM}(x-1; y)$ و $\overrightarrow{BC}(1; -\sqrt{3})$ $M \in (BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1) - y = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$ بالتالي: $(BC): \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$ أ)	
	ب) $d(A; (BC)) = \frac{ \sqrt{3}x_A + y_A - \sqrt{3} }{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{ \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} }{2} = \sqrt{3}$	
للتذكير ارتفاع مثلث هو مستقيم يمر من أحد رؤوسه وعمودي على حامل الضلع المقابل لهذا الرأس، أما المتوسط فهو مستقيم يمر من أحد رؤوسه ومنتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.		