MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

Dominique Dubuis
Lycée Margueritte VERDUN
http://www.bacssimargo.fr

1. ACTION MECANIQUE

1.1. DEFINITION

On appelle action mécanique toute cause susceptible de :
- *déformer un corps*
- *modifier son mouvement*

1.2. PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES (ou RECIPROQUES)

Toute action mécanique implique l'existence simultanée d'une action réciproque, qui est son opposée.

(voir l'exemple ci-dessous : est-ce le maître qui promène son chien, ou le chien qui promène son maître ? Pour la laisse, ça ne change rien ; Il y a autant d'efforts d'un coté que de l'autre…)

2. FORCE

2.1. DEFINITION

On appelle force une action mécanique exercée entre deux particules (pas forcément en contact)

UNITE de force : *le Newton* (N)

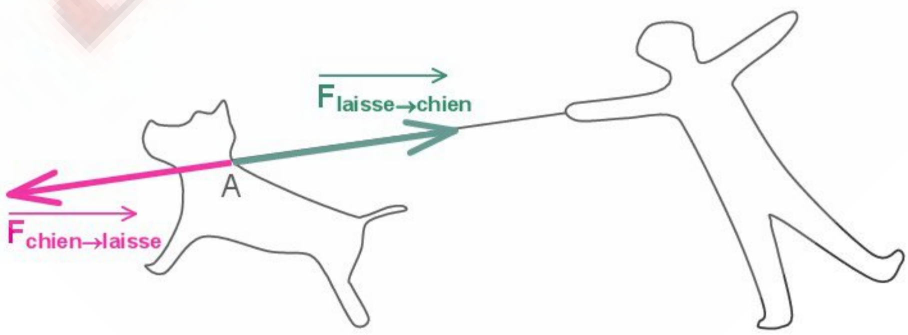
En pratique : une action mécanique peut être représentée par une force à partir du moment où elle s'exerce sur une surface suffisamment petite (par rapport aux dimensions des solides concernés).

2.2. CARACTERISTIQUES D'UNE FORCE

Une force est caractérisée par :
- *son point d'application*
- *sa direction*
- *son sens*
- *sa valeur (norme)*

Donc elle est modélisable par un **VECTEUR LIE (ou un BIPOINT)**

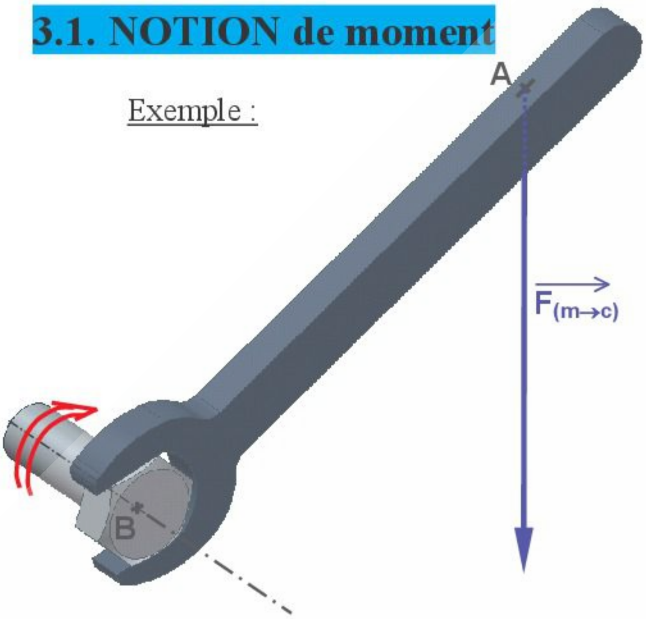
Exemple :

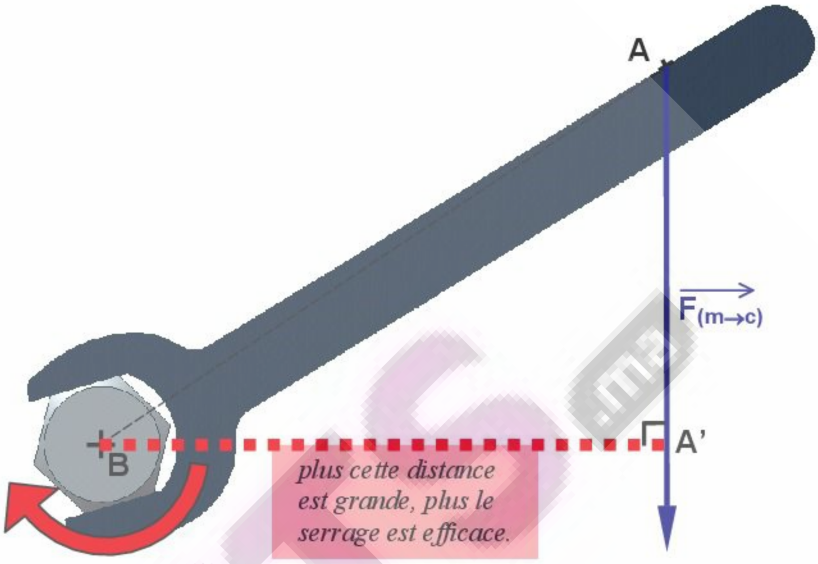


3. MOMENT D'UNE FORCE

3.1. NOTION de moment

Exemple :





Admettons que la main exerce sur la clé une action mécanique équivalente à une force, appliquée au point A, représentée par le vecteur $F_{(m\to c)}$.

Cette force a tendance à serrer la vis en la faisant tourner

On dira que ***la force exercée au point A crée un <u>moment</u> par rapport au point B***

Ce moment dépend : ▪ de la norme de la force

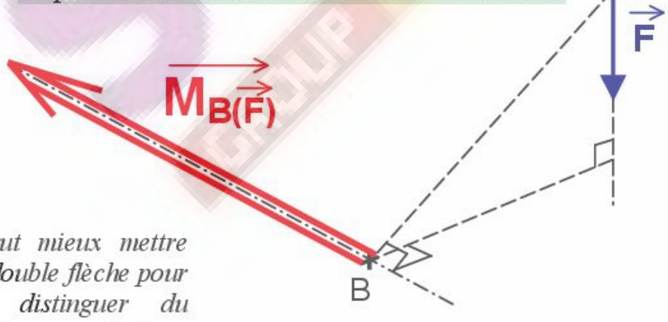
▪ de la distance BA' (appelée "bras de levier")

on dit aussi, parfois à tort, un COUPLE. Dans le cas de la clé, on parle de couple de serrage

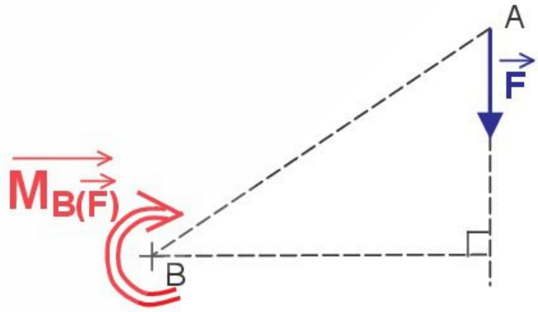
Ce moment :
- s'exerce sur un axe (dans l'exemple : l'axe de rotation de la vis): il a une direction
- a un sens (serrage ou desserrage)
- a une valeur, donc une norme

⇒ Le moment d'une force peut être représenté mathématiquement par un **vecteur**

Représentations habituelles d'un moment :



il vaut mieux mettre une double flèche pour bien distinguer du premier coup d'œil un vecteur moment d'un vecteur force.



Nous allons voir maintenant une définition un peu plus mathématique du moment d'une force…

3.2. MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT

On appelle **MOMENT PAR RAPPORT AU POINT B DE LA FORCE $\overrightarrow{F}$** qui s'applique en **A** le vecteur d'origine B tel que :

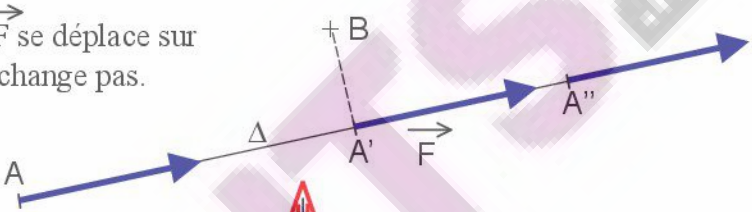
$$\overrightarrow{M_{B(\overrightarrow{F})}} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}$$

se lit "BA vectoriel F "

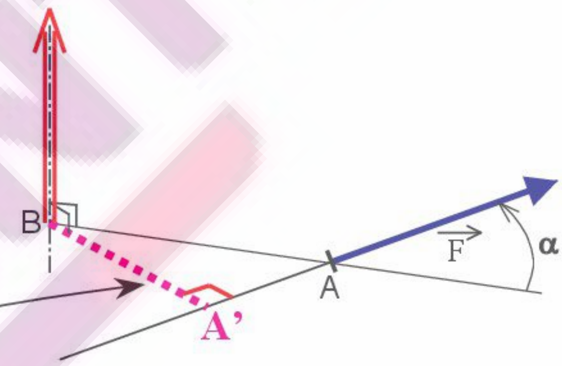
UNITE DE MOMENT : Newton.mètre (N.m)

PARTICULARITES DU VECTEUR MOMENT
ou **qu'est-ce qui se cache derrière l'incompréhensible définition ci-dessus ?**

- Si le point d'application A de la force $\overrightarrow{F}$ se déplace sur le support Δ de celle-ci, le moment ne change pas.



- Le vecteur moment est perpendiculaire au plan contenant le vecteur force $\overrightarrow{F}$ et le point B où le moment est calculé



- Sa norme vaut :

d'après la définition mathématique d'un produit vectoriel

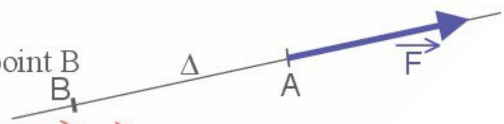
$$\left\|\overrightarrow{M_{B(\overrightarrow{F})}}\right\| = \underbrace{\left\|\overrightarrow{F}\right\| . \left\|\overrightarrow{BA}\right\| . \sin\alpha}_{} = \left\|\overrightarrow{F}\right\| . \mathbf{BA'}$$

c'est à dire : **Moment = Force × "bras de levier"** *cette relation est parfois bien plus pratique qu'un produit vectoriel, mais ne donne pas le signe.*

- Son sens est tel que le trièdre [$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{M_{B(\overrightarrow{F})}}$] est direct

Il est plus facile de s'imaginer que le vecteur moment va dans le même sens qu'un **tire-bouchon** sur lequel on exercerait la force $\overrightarrow{F}$

- Le moment en B est nul : - si la force $\overrightarrow{F}$ est nulle
  ou - si son support Δ passe par le point B



$\overrightarrow{M_{B(\overrightarrow{F})}} = \overrightarrow{0}$

3.3. MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN AXE

On appelle moment d'une force $\overrightarrow{F}$ par rapport à un axe (O , $\overrightarrow{i}$) la composante suivant $\overrightarrow{i}$ du moment de $\overrightarrow{F}$ par rapport à un point quelconque A de l'axe (O , $\overrightarrow{i}$)

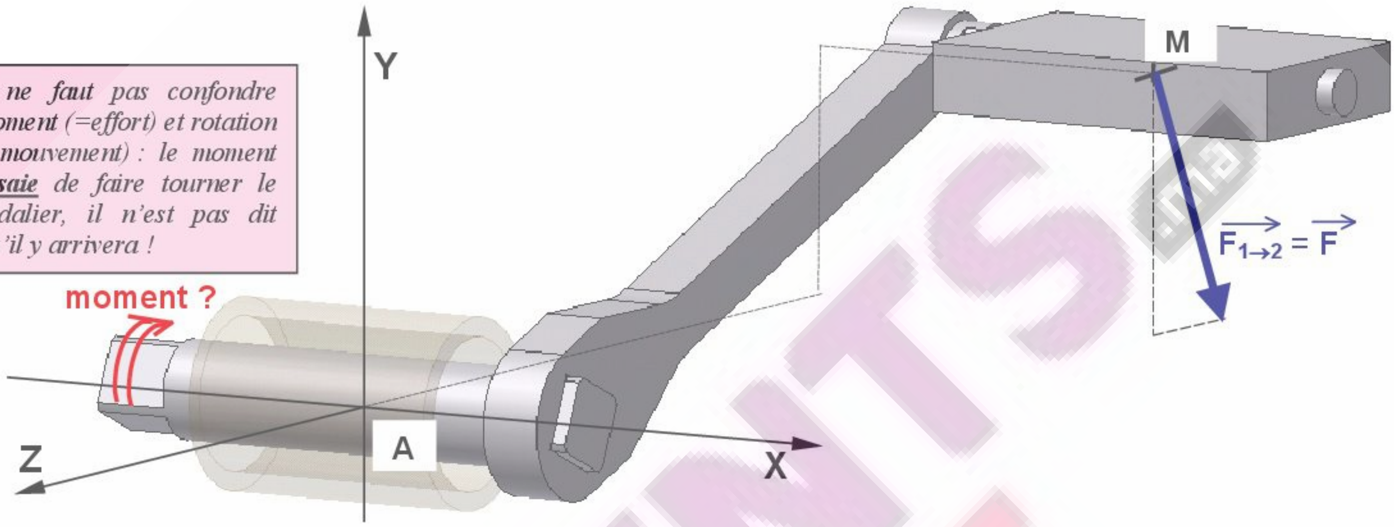
Autrement dit, on calcule le moment par rapport à un point de l'axe, puis on le projette (ou on lit la coordonnée qui se trouve sur l'axe en question)

EXEMPLE : Pédalier

L'action du pied 1 sur la pédale 2 est représentée en A par une force dans le plan vertical YZ : $\overrightarrow{F_{1\to2}} = \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-500} \\ \mathbf{-10} \end{vmatrix}$ Newtons

BUT : Calculer le moment de la force $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ par rapport à l'axe de rotation du pédalier $(A, \overrightarrow{x})$, dans la position dessinée, avec $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = \begin{vmatrix} \mathbf{0{,}1} \\ \mathbf{0{,}05} \\ \mathbf{-0{,}2} \end{vmatrix}$ mètres

il ne faut pas confondre moment (=effort) et rotation (=mouvement) : le moment ***essaie*** *de faire tourner le pédalier, il n'est pas dit qu'il y arrivera !*



première méthode : utilisation du produit vectoriel (incontournable dans le cas d'un problème spatial)

D'abord on calcule le moment par rapport au **point** A de la force $\overrightarrow{F}$: on applique la formule du cours…

$$\overrightarrow{M_{A\,(\overrightarrow{F})}} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}05 \\ -0{,}2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -500 \\ -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -100{,}5 \\ 1 \\ -50 \end{vmatrix} \quad (\text{N.m})$$

méthode de calcul du produit vectoriel : chaque ligne du résultat vient d'une sorte de déterminant des deux autres lignes (XY donne Z , YZ donne X , ZX donne Y)

$\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix} \rightarrow ad - bc$

$$\begin{vmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}05 \\ -0{,}2 \\ 0{,}1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -500 \\ -10 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}05\times(-10) - (-0{,}2)\times(-500) \\ -0{,}2\times0 - 0{,}1\times(-10) \\ 0{,}1\times(-500) - 0{,}05\times0 \end{vmatrix}$$

il faut réécrire la ligne X pour ne pas faire d'erreur de signes

et vous comprenez pourquoi il est bon de maîtriser aussi la méthode du "bras de levier"…

Puis on calcule le moment par rapport à **l'axe** Ax : il suffit de projeter…

$$\overrightarrow{M_{Ax\,(\overrightarrow{F})}} = -100{,}5 \cdot \overrightarrow{x}$$

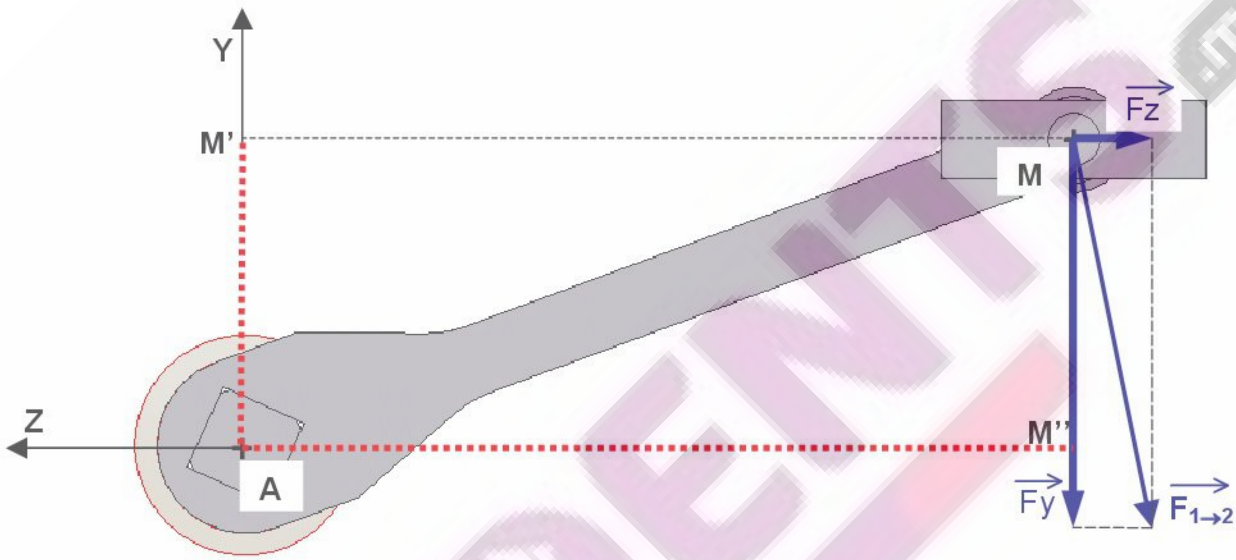
La force $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ exerce un moment de –100,5 N.m autour de l'axe de rotation du pédalier

Deuxième méthode : utilisation de la notion « **force × bras de levier** »
(plus facilement utilisable dans un problème plan, ou supposé comme tel pour simplifier)

Ici, le moment qui nous intéresse est sur l'axe X.
Donc on peut étudier ce qui se passe uniquement en projection dans un plan perpendiculaire à cet axe, c'est à dire dans YZ.

En effet, une force de direction X ne peut pas créer de moment sur l'axe X, et un décalage suivant X du point d'application de la force n'a aucune conséquence sur son moment autour d'un axe parallèle à X. Par conséquent, on peut très bien se passer dans notre cas des coordonnées sur X de la force ainsi que des points.

Nous allons donc, pour calculer un moment sur X, travailler dans le plan YZ



On décompose la force : $\vec{F}_{1\to2} = \vec{Fy} + \vec{Fz}$ *c'est plus facile que de chercher directement le "bras de levier" de la force $F_{1\to2}$, surtout si vous n'êtes pas copain avec la trigo ...*

donc $\overrightarrow{M_A(\vec{F}_{1\to2})} = \overrightarrow{M_A(\vec{Fy})} + \overrightarrow{M_A(\vec{Fz})}$

*(produit de chaque force par son **"bras de levier"**)*

$= (-Fy \times AM'' - Fz \times AM')\ \vec{x}$

c'est l'axe qui est perpendiculaire à la figure

ces deux moments sont en effet négatifs sur l'axe X : un tire-bouchon planté en A s'enfoncerait dans la feuille (dans l'écran ?) sous l'effet de Fy comme Fz

D'après les coordonnées, les **NORMES** sont :

Fy = 500 N Fz = 10 N AM' = 0,05 m AM'' = 0,2 m

Finalement:

$\overrightarrow{M_A(\vec{F}_{1\to2})} = (-500\times0{,}2 - 10\times0{,}05)\ \vec{x} = \mathbf{-100{,}5\ \vec{x}}$

La force $\vec{F}_{1\to2}$ exerce un moment de –100,5 N.m autour de l'axe de rotation du pédalier.
(100 grâce à Fy et 0,5 grâce à Fz)

4. MODELISATION d'une ACTION MECANIQUE QUELCONQUE

4.1. Nécessité d'une RESULTANTE et d'un MOMENT résultant en un point

Rappelons d'abord que la notion de force <u>seule</u> ne peut représenter que des actions mécaniques bien particulières, équivalentes à des actions « ponctuelles ».
Les actions mécaniques quelconques sont en fait le résultat d'une infinité de forces s'exerçant sur une surface (actions de contact) ou un volume (actions à distance).

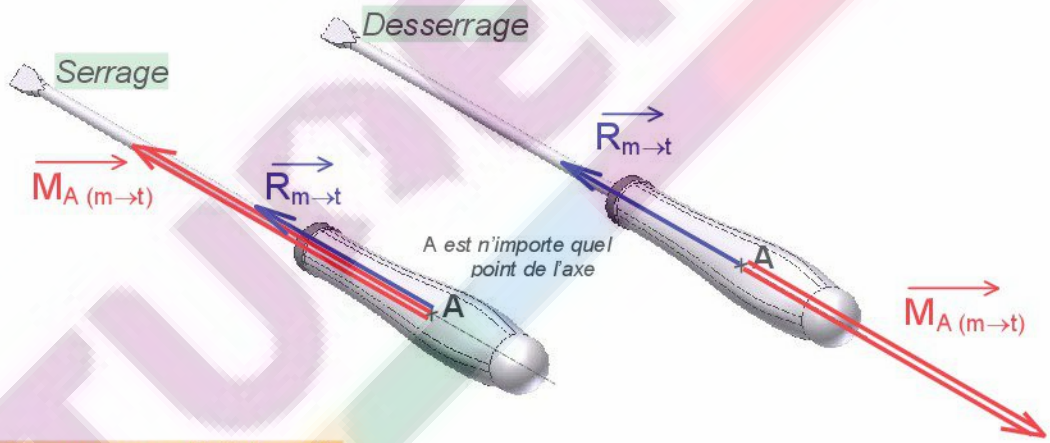
Une action mécanique quelconque peut être représentée en un point à condition d'utiliser deux vecteurs :

- ***un vecteur force : la <u>résultante des forces</u> constituant l'action mécanique***
- ***un vecteur moment : le <u>moment résultant</u> en ce point des forces***

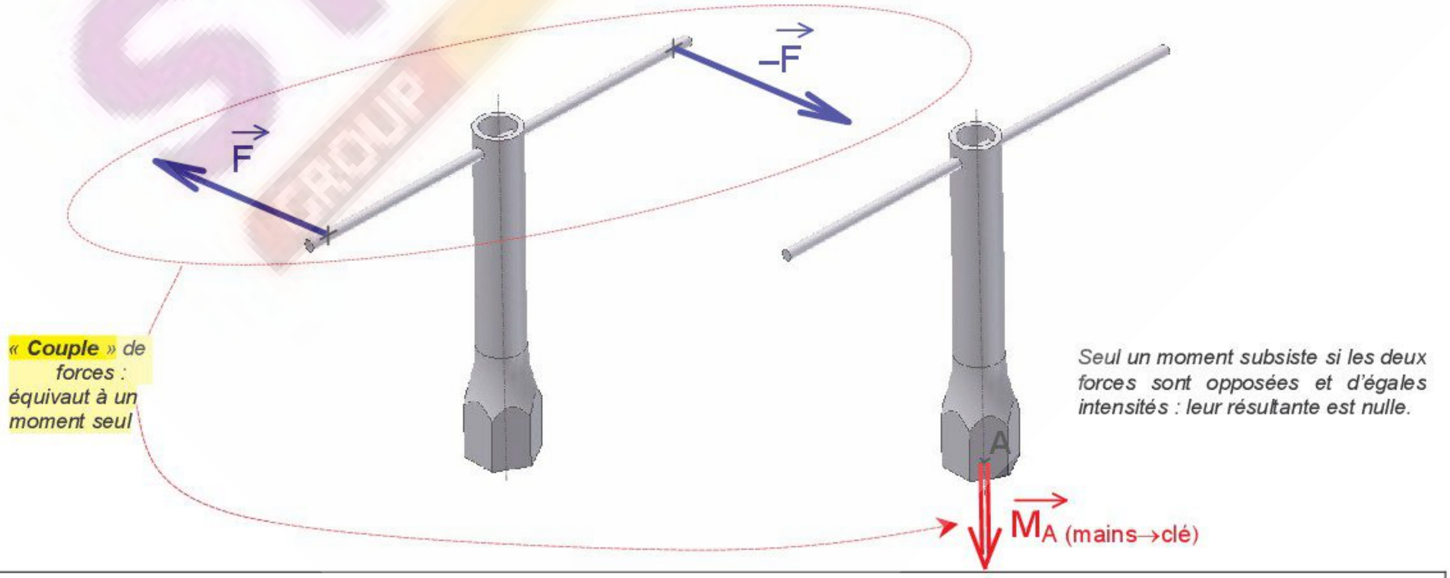
*Cette façon de représenter une action mécanique en un point quelconque est surtout adaptée pour les études dans lesquelles **le solide est supposé indéformable** (études de « statique » ou de « dynamique »). Elle n'est plus suffisante dès que l'on s'intéresse aux déformations ou aux contraintes internes dans un solide (domaine de la « résistance des matériaux »).*

<u>Exemples</u>

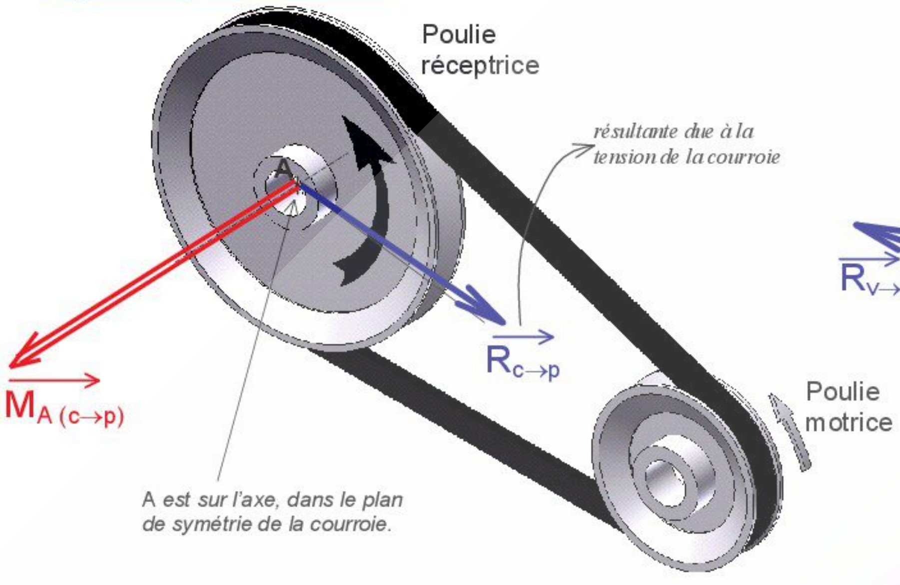
Action de la main sur un tournevis



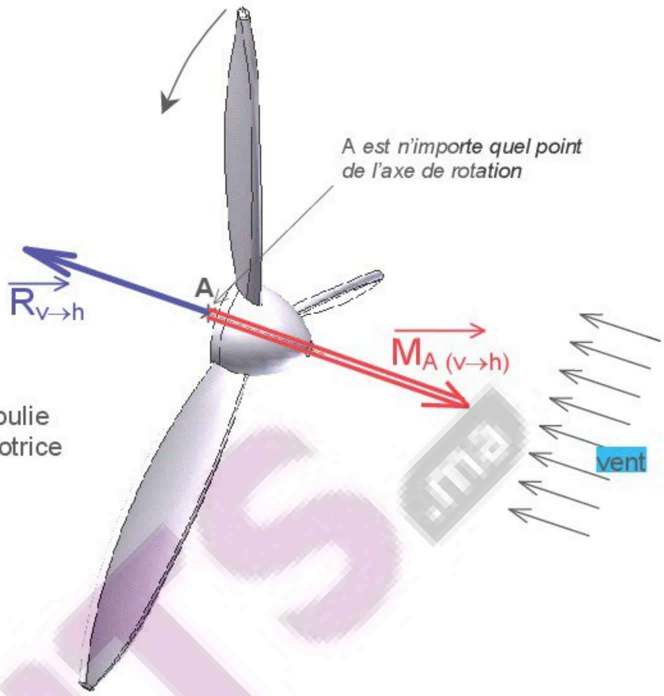
Action des mains sur une clé à bougie : chaque main exerce une action opposée à l'autre



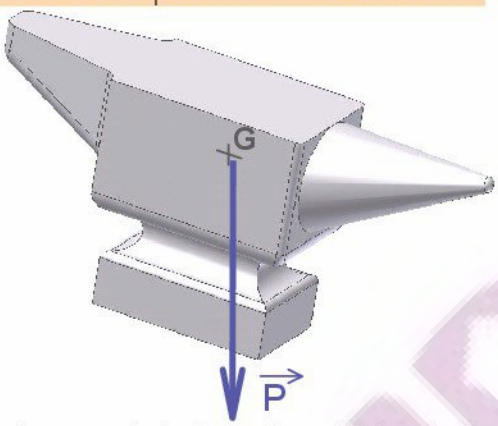
Action d'une courroie sur la poulie qu'elle entraîne



Action du vent sur une hélice d'éolienne

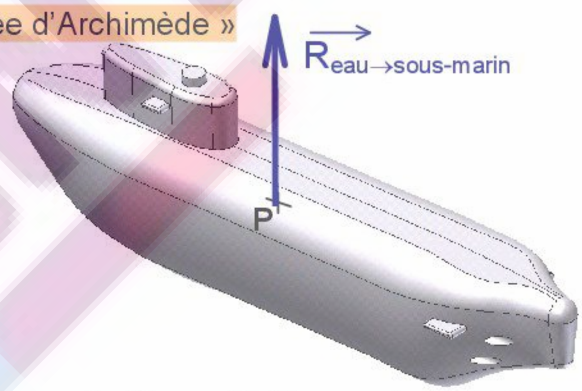


Action de la pesanteur sur un solide



*Les moments des forces de gravité de toutes les particules du solide s'équilibrent autour d'un point : le **centre de gravité G***
Le moment résultant en G est donc nul. Une résultante verticale en G suffit donc à représenter l'action de pesanteur : le poids.

« Poussée d'Archimède »



Il existe un point où la « poussée d'Archimède » se résume à une résultante seule (et un moment nul) : le « centre de poussée » P

On pourrait imaginer ainsi toutes sortes d'actions mécaniques, il serait toujours possible de les représenter en un point avec deux vecteurs : une force et un moment.
(L'un des deux pouvant être nul, en particulier le moment si le point est judicieusement choisi)

4.2. TORSEUR d'action mécanique

4.2.1. Un outil mathématique pour nous simplifier la vie...

Plutôt que de s'embarrasser avec deux vecteurs différents pour représenter une action mécanique, nous allons les regrouper en une seule chose. Cette chose correspond à ce que les mathématiciens appellent : ***torseur***

Dans le cadre de ce cours, il est évident que dès que l'on parlera de torseur, il s'agira d'un torseur d'action mécanique. Mais il faut savoir que cet outil mathématique peut aussi servir à représenter d'autres phénomènes (de la même façon que l'outil « vecteur » peut être utilisé pour représenter une force, un moment, la vitesse d'un point, un champ magnétique en un point, etc...)

4.2.2. Définition mathématique

On appelle **TORSEUR** un ensemble $\{\tau\}$ formé :

d'un vecteur $\overrightarrow{R}$ appelé **résultante** du torseur, qui est **constante**
et d'un champ vectoriel de **moments** $\overrightarrow{M}$ vérifiant la condition : $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$