

## حركة دوران حجم صلب حول محور ثابت

### I - الأقصول الزاوي - السرعة الزاوية ( تذكرة )

يكون جسم صلب ، غير قابل للتشوه ، في حركة دوران حول محور ثابت ( $\Delta$ ) إذا كانت جميع نقطه في حركة دائيرية ممركزة على هذا المحور باستثناء النقطة المنتسبة للمحور ( $\Delta$ ) .

نحدد موضع نقطة متحركة من الجسم ، في مرجع أرضي نعتبره غاليليا في لحظة

#### 1 - الأقصول الزاوي

الأقصول الزاوي للنقطة المتحركة  $M$  من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت ( $\Delta$ ) هو

الزاوية الموجة  $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$  بحيث :

أن  $\overrightarrow{Ox}$  محورا مرجعا (أصل الأطوار)

والمسار الدائري للنقطة المتحركة موجها في منحي الحركة والذي نعتبره موجبا .

وحدة الأقصول الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي الرديان rad .

خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور

( $\Delta$ ) يتغير الأقصول الزاوي مع الزمن  $t$  أي أنه دالة

زمنية  $\theta(t)$  .

#### 2 - السرعة الزاوية $\dot{\theta}$

نعتبر أنه خلال حركة دوران الجسم الصلب حول

المحور ( $\Delta$ ) ، أنه في اللحظة  $t$  تحل النقطة  $M$  الموضع  $M_i$  .

نعتبر لحظتين جد متقاربتين  $t_{i+1}$  و  $t_{i-1}$  تؤطران اللحظة  $t$  ، في هذه الحالة تساوي السرعة الزاوية

للنقطة  $M$  في اللحظة  $t$  السرعة المتوسطة للنقطة  $M$  بين اللحظتين  $t_{i+1}$  و  $t_{i-1}$  وهي :

$$\dot{\theta} = \frac{\theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$\theta(t_{i+1})$  الأقصول الزاوي للنقطة  $M$  في اللحظة  $t_{i+1}$

$\theta(t_{i-1})$  الأقصول الزاوي للنقطة  $M$  في اللحظة  $t_{i-1}$

نضع  $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$  و  $\Delta\theta = \theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})$

إذا كانت  $t_{i+1}$  و  $t_{i-1}$  جد متقاربتين ، فإن  $\Delta t$  تتناهى

نحو الصفر وبالتالي ستكون عندنا :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\theta}{dt}$  المشتقة الأولى بالنسبة للزمن للأقصول الزاوي

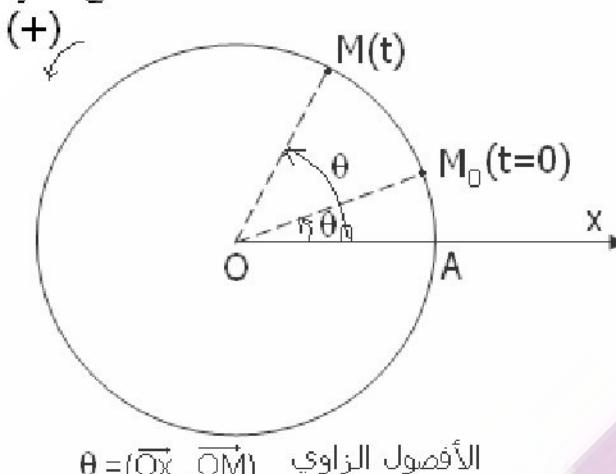
في اللحظة  $t$  .

وحدة السرعة الزاوية في النظام العالمي للوحدات

هي

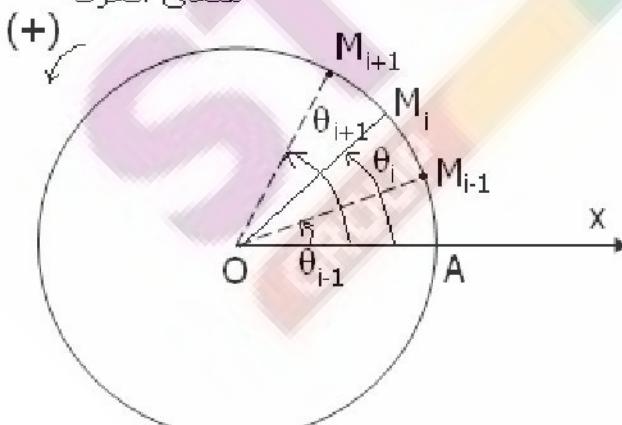
يرتبط الأقصول الزاوي والأقصول المنحني ( $s$ ) في كل لحظة بالعلاقة التالية :  $s(t) = r\theta(t)$

منحي الحركة



الأقصول الزاوي  $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$

منحي الحركة



يرتبط الأقصول الزاوي والأقصول المنحني ( $s$ ) في كل لحظة بالعلاقة التالية :  $s(t) = r\theta(t)$

ومنه نستنتج العلاقة بين السرعة الخطية للنقطة M (السرعة الزاوية) والسرعة الزاوية  $v(t) = \dot{s}(t)$

$$v(t) = r\dot{\theta}(t) : \dot{\theta}(t)$$

### 3 \_ التسارع الزاوي $\ddot{\theta}(t)$

#### A - تعريف

لتكن  $(\dot{\theta}(t_i))$  السرعة الزاوية لنقطة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت في لحظة  $t_i$  بحيث مؤطرة بلحظتين جد متقاربتين  $t_{i+1}$  و  $t_{i-1}$  بحيث أن  $(\dot{\theta}(t_{i+1}))$  السرعة الزاوية لنقطة M في اللحظة  $t_{i+1}$  و  $(\dot{\theta}(t_{i-1}))$  السرعة الزاوية لنقطة M في اللحظة  $t_{i-1}$

عندما تناهى  $t_{i+1} - t_{i-1} = \Delta t$  نحو الصفر يتناهى خارج القسمة  $\frac{\dot{\theta}(t_{i+1}) - \dot{\theta}(t_{i-1})}{\Delta t}$  إلى المشتقة بالنسبة للزمن للسرعة الزاوية أي أن :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}(t_{i+1}) - \dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}(t_i)$$

وحدة التسارع الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي  $\text{rad/s}^2$

#### تمرين تطبيقي :

1 - السرعة الزاوية لنقطة متحركة M من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هي  $\dot{\theta} = 10 \text{ rad/s}$ .

أ - أحسب التسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  لهذه النقطة .

ب - ما طبيعة حركة النقطة M ؟

ج - أكتب تعبير الأقصول الزاوي  $\theta$  بدالة الزمن t علماً أن الأقصول الزاوي عند أصل التواريخ هو  $\theta_0 = 2 \text{ rad}$ .

2 - تعبير الأقصول الزاوي لنقطة N من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هو :

$$\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6 \quad (\text{rad})$$

أ - أوجد تعبير السرعة الزاوية بدالة الزمن .

ب - أوجد تعبير التسارع الزاوي بدالة الزمن .

ج - ما طبيعة حركة النقطة N ؟

### B - المركبات $a_N$ و $a_T$ في أساس فريني.

لدينا في أساس فريني :  $\vec{a} = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$  بحيث أن

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad \text{و} \quad a_T = \frac{dv}{dt}$$

s الأقصول المنحني للنقطة M في لحظة t و  $\frac{ds}{dt}$  السرعة الخطية للنقطة M في اللحظة t و r شعاع

انحناء المسار في اللحظة t .

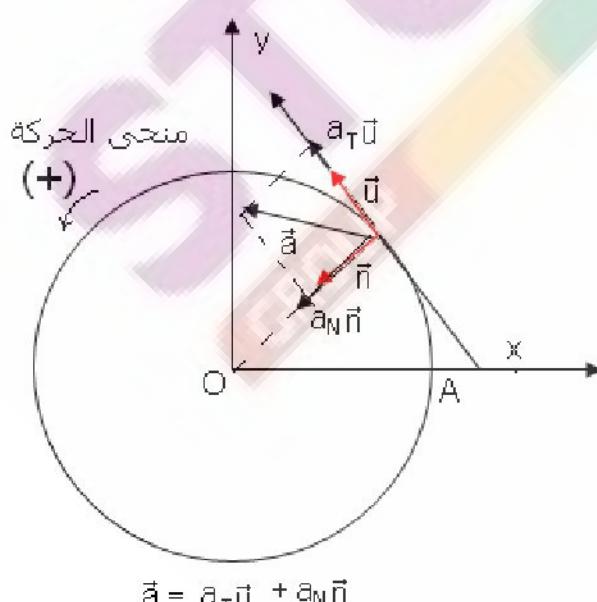
حسب تعريف الدوران لجسم صلب حول محور ثابت ،

فإن مسار كل نقطة متحركة من الجسم دائرياً ممكراً على محور الدوران وبالتالي يكون اتجاه المتجهة

الواحدية  $\vec{n}$  نحو النقطة O مركز الدائرة ويكون شعاع

الانحناء مساوياً لشعاع الدائرة r .

نعلم أن  $s = r \cdot \theta$  وأيضاً  $\dot{s} = r \cdot \dot{\theta}$  ومنه فإن



$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \dot{\theta}$$

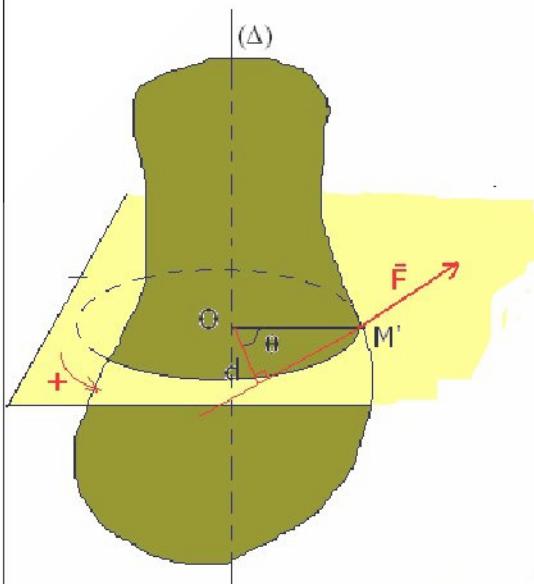
$$a_N = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r(\dot{\theta})^2$$

ولدينا كذلك  $r = \rho$  أي أن

## II – العلاقة الأساسية للتحريك في حالة دوران جسم حول محور ثابت .

تخص هذه العلاقة كل جسم صلب خاضع لتأثيرات ميكانيكية في دوران حول محور ثابت

### 1 – نص العلاقة



في معلم مرنبي بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت  $(\Delta)$  يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في

دوران حول محور ثابت  $(\Delta)$  في كل لحظة ، جداء عزم القصور  $J_{\Delta}$

والتسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  للجسم في اللحظة المعينة :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}_i) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

$\sum M_{\Delta}(\vec{F}_i)$  مجموع العزوم بالنسبة للمحور  $\Delta$  للقوى المطبقة

على الجسم الصلب (N.m)

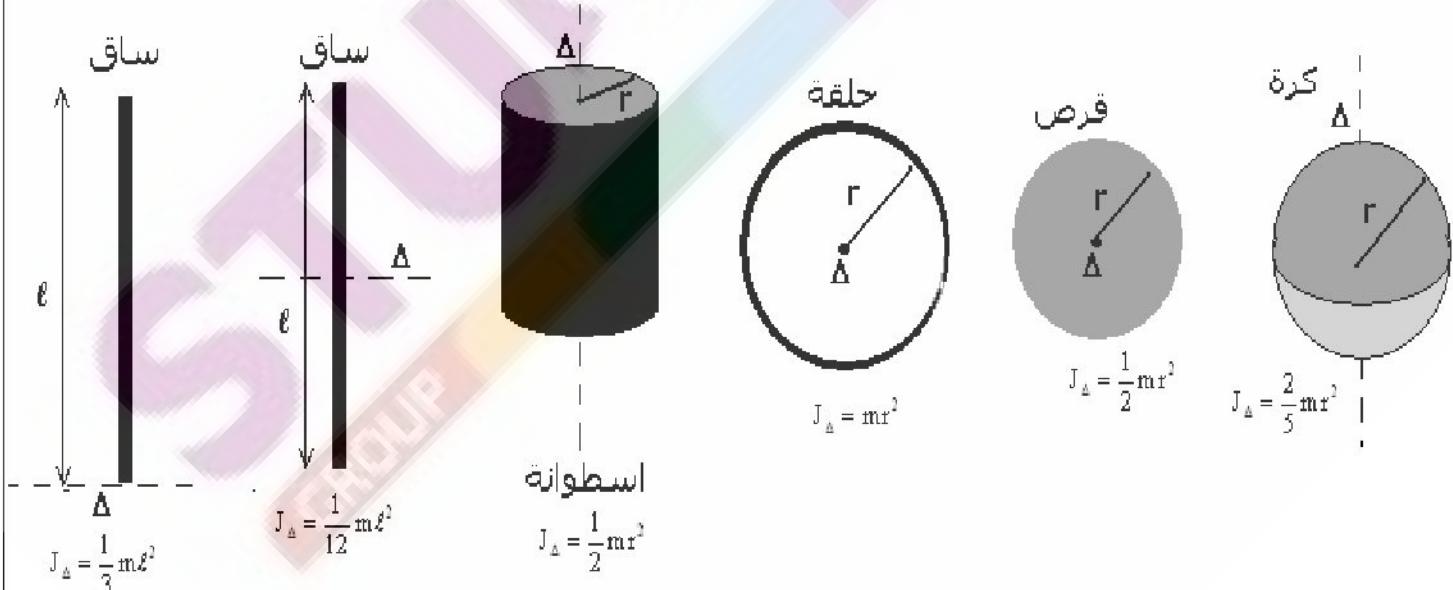
$J_{\Delta}$  عزم قصور الجسم الصلب بالنسبة للمحور  $(\Delta)$  نعبر عنه ب

$$\text{kg.m}^2$$

$\ddot{\theta}$  التسارع الزاوي نعبر عنه ب  $\text{rad/s}^2$

### 2 – تعابير عزم القصور لأجسام متجلسة ذات أشكال هندسية بسيطة .

عزم قصور  $J_{\Delta}$  لجسم صلب يميز حركة دوران الجسم حول المحور  $(\Delta)$



حالات خاصتان :

إذا كان التسارع الزاوي منعدما  $\ddot{\theta} = 0$  فإن حركة الجسم الصلب حول المحور  $\Delta$  حركة دورية منتظامة .

إذا كان التسارع الزاوي ثابتًا تكون حركة الجسم الصلب حول المحور  $\Delta$  حركة دورية متغيرة بانتظام .