

النهايات والاتصال

(5) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

(6) النهايات والترتيب.

(a) إذا كان $|f(x) - l| \leq g(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} f(x) = l$ و $\lim_{x_0} g(x) = 0$

(b) إذا كان $f(x) \leq g(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x_0} f(x) = +\infty$

(c) إذا كان $f(x) \leq g(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x_0} g(x) = -\infty$

(d) إذا كانت $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} f(x) = l$ و $\lim_{x_0} g(x) = \lim_{x_0} h(x) = l$

(II) الإتصال

(1) تعريف

لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0} f(x)$

- (*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$
- (*) تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$
- (*) تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$
- (*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على يمين و على يسار x_0 .

(2) خاصيات

- (a) كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$.
- (b) كل دالة جذرية متصلة على حيز تعريفها.
- (c) (*) الدوال $x \rightarrow \sin x$ و $x \rightarrow \cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$.
- (*) الدال $x \rightarrow \tan x$ متصلة على حيز تعريفها.
- (d) إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I فإن الدوال $f + g$ و $f \cdot g$ و αf متصلة على I .
- وإذا كانت g لا تتعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ متصلة على I .

ملاحظة

إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مجموع وجداء دوال متصلة في غالب الأحيان.

(3) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0} f(x)$ إذا وجدنا $\lim_{x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 معرف بما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

(I) النهايات

(1) الأشكال الغير محددة:

$+\infty - \infty$	$\infty \times 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
--------------------	-------------------	-------------------------	---------------

(2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$$a \times \infty = \infty \quad (a \neq 0)$$

$$\infty \times \infty = \infty$$

$$0 \times \infty \text{ ش غ محدد}$$

$$+\infty + a = +\infty$$

$$-\infty + a = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty - \infty \text{ ش غ محدد}$$

$$\frac{\infty}{a} = \infty \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad \frac{a \neq 0}{0} = \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \text{ ش غ محدد}$$

$$(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & \text{sin est paire} \\ -\infty & \text{sin est impaire} \end{cases}$$

$$\sqrt{+\infty} = +\infty$$

(3) خاصيات

- (a) إذا كانت للدالتين f و g نهاية منتهية في x_0 فإن الدوال $f + g$ و $f \cdot g$ و αf تقبل نهاية منتهية في x_0
- و $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- و $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- و $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \neq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

- (b) نهاية دالة حدودية في ∞ هي نهاية الحد الأكبر درجة.
- (c) نهاية دالة جذرية في ∞ هي نهاية خارج الحدين الأكبر درجة.

(4) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ ← التعميل.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty - \infty$

(*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ← المرافق.

(*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ← التعميل.

(c) $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a-a}{0} = \frac{0}{0}$ (a ≠ 0) ← المرافق.

(d) $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0}$ (a ≠ 0) ← التفكيك ثم ربما المرافق.

(e) ملاحظة: $\begin{cases} x = \sqrt{x^2}; & x \geq 0 \\ x = -\sqrt{x^2}; & x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad \sqrt{x^2} = |x|$