دراسة الدوال

I) الإشتقاق

1) تعاريف

a) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونكتب $f'(x_0)=l$.

b) تكون f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان :

$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$ ونكتب $f_d'(x_0)=l$.

c) تكون f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان :

$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$ ونكتب $f_g'(x_0)=l$.

d) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على يمين x_0 و على يسار x_0 و $f_d'(x_0)=f_g'(x_0)$.

e) (* (f متصلة في x_0) ⇒ (f قابلة للإشتقاق في x_0)

(* (f غير قابلة للإشتقاق في x_0) ⇒ (f غير متصلة في x_0)

2) التأويل الهندسي :

a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معامله الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الأشكال التالية :

b) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معامله الموجه $f_d'(x_0)$ معادلته $(T_1): y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الشكلين التاليين :

c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للإشتقاق على اليسار .

ملاحظة (* إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يين x_0 و على يسار x_0 و $f_d'(x_0)\neq f_g'(x_0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في x_0 إذن C_f لا يقبل مماسا في M لكنه يقبل نصفي مماس غير منطبقين وسيكون C_f على أحد الأشكال :

(* إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "لاينكسر" في M وإذا كانت f غير قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "ينكسر" في M ويكون زاوية . ونقول إن M نقطة مزواة .

3) الدالة التآلفية المماسة لدالة .

a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة $u(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0

b) وإذا كان a جد قريب من x_0 فإن $u(a)$ قيمة مقربة ل $f(a)$

$(f(a)\approx u(a))$

4) اشتقاق دالة على مجال- الدالة المشتقة

a) نقول إن f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I

b) نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a,b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a,b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

c) إذا كانت f قابلة للإشتقاق علىI فإن الدالة $f':x\to f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة

d) إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة المشتقة للدالة f' تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'' .

e) **الدوال المشتقة لبعض الدوال الإعتيادية .**

1) $(a)'=0$

10) $(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

2) $(x)'=1$

11) $(\frac{1}{f})'=\frac{-f'}{f^2}$

3) $(ax)'=a$

12) $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$

4) $(x^n)'=nx^{n-1}$

13) $(\sin x)'=\cos x$

5) $(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$

14) $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$

6) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

15) $(\cos x)'=-\sin x$

7) $(f+g)'=f'+g'$

16) $(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$

8) $(fg)'=f'g+g'f$

17) $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

9) $(af)'=af'$

18) $(f^n)'=nf'f^{n-1}$

19) $(\tan(ax+b))'=a(1+\tan^2(ax+b))$

ملاحظة a) لتكن f دالة معرفة على مجال I ولا تحتوي على $\sqrt{}$.

لكي ندرس اشتقاق f في x_0 نتحقق هل f تغير صيغتها في x_0 ام لا ؟

(* إذا كنت f لا تغير صيغتها في x_0 نقوم بحساب $f'(x)$ ونعوض x بـ x_0

(* إذا كنت f تغير صيغتها في x_0 ندرس الإشتقاق باستعمال معدل التغير .

b) إذا كانت f' تنعدم في x_0 $(f'(x_0)=0)$ فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ موازيا لمحور الأفاصيل .

5) تغيرات دالة

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .

a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\geq 0$

b) تكون f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\geq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

c) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\leq 0$

d) تكون f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\leq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

6) مطارف دالة .

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و $x_0 \in I$. يكـون للدالـة f مطرافا نسبيا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0

II) التمثيل المبياني لدالة

1) التقعر

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

a) يكون C_f محدبا ( ) إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$

b) يكون C_f مقعرا ( ) إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$

2) نقط انعطاف

a) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و (T) المماس لـ C_f في $M(x_0, f(x_0))$ نقول إن M نقطة انعطاف إذاكان C_f يغير التقعر في M (C_f يخترق (T)) :

b) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و $x_0 \in I$ تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كان f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0 .

ملاحظة a) إذا كانت f' تنعدم ولاتغير الإشارة في x_0 فـإن $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس فيها موازيا لمحور الأفاصيل .

b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف او دراسة التقعـر نحسـب $f''(x)$ وندرس إشارتها .

3) الفروع اللانهائية .

a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لانهائيا إذا كانت لدينا إحـدى الحـالات التاليـة :

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

b) تصنيف الفروع اللانهائية :

1) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$

فإن المستقيم $(\Delta): x = a$ مقارب ل C_f بجوار a .

2) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = b}$

فإن المستقيم $(\Delta): y = a$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .

3) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty}$ نقوم بحساب $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

a) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞ .

b) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .

c) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0}$ نقوم بحساب $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$.

i) إذا كان $\boxed{\lim(f(x) - ax) = b}$

فإن المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .

ii) إذا كان $\boxed{\lim(f(x) - ax) = \infty}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه $y = ax$ بجوار ∞ .

ملاحظة يكون المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقاربا لـ C_f بجـوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ ونسـتعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta): y = ax + b$ مقاربـا لـ C_f أو إذا كانت $f(x)$ على شـكل $f(x) = ax + b + h(x)$ مـع $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$.

4) محور تماثل– مركز تماثل

a) يكون المستقيم $(\Delta): x = a$ محور تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$

*) $(\forall x \in D_f): f(2a - x) = f(x)$

b) تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$

*) $(\forall x \in D_f): f(2a - x) = 2b - f(x)$

III) الدوال الدورية

1) تعريف

a) نقول إن الدالة f دورية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم T بحيث $(\forall x \in D_f): f(x + T) = f(x)$ وكل عدد T يحقق هذا الشرط يسمى دور f

b) إذا كان T دورا للدالة f فإن كل عدد kT دور لـ f $(k \in \mathbb{Z})$

c) نختار عادة أصغر دور موجب قطعا .

ملاحظة **a)** لكي نبين أن f دورية يجب أولا ملاحظة الدور ثم نتحقق منه

b) *) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ *) $\cos(x + \pi) = -\cos x$

*) $\sin(x + k\pi) = \sin x$ *) $\sin(x + \pi) = -\sin x$

*) $\tan(x + k\pi) = \tan x$

2) ادوار بعض الدوال الإعتيادية .

a) $f(x) = \cos(ax + b)$ أو $f(x) = \sin(ax + b)$ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

b) $f(x) = \cos^2(ax + b)$ أو $f(x) = \sin^2(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

c) $f(x) = \tan(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

d) لكي نحدد دور $f + g$ نحدد أدوار كل من f و g و نأخذ أصغر دور مشترك .

3) رتابة دالة دورية .

لتكن f دالة دورية دورها T . إذا كانت f رتيبة علـى $[a, b]$ فـإن f رتيبة على $[a + T, b + T]$ ولها نفس الرتابة .

4) منحنى دالة دورية

a) إذا كانت f دالة دورية دورها T فيكفي إنشاء C_f على مجال سعته T (عادت نأخذ $[0, T] \cap D_f$) ثم إزاحته بلإزاحة التـي متجهتهـا $T\vec{i}$ ومن أجل إزاحة هذا الجزئ نبحث عن النقط المهمة التـي تكونـه ونزيحهـا بإضافة T إلى أفصولها والإحتفاظ بلأرتوب إذا أردنا الإزاحة نحـو اليمـين ونطرح T من الأفصول اذا أردنا الإزاحة نحو اليسار .

b) إذا كانت f دالة دورية دورها T وزوجية(أو فردية) فيكفـي إنشـاء C_f على $\left[0, \frac{t}{2}\right] \cap D_f$ ثم إنشاء المماثل بالنسبة لمحور الأراتيب (او أصل المعلم) ثم الإزاحة .