السنة الدراسية: 2014/2013 (مدة الإنجاز 3 ساعات و نصف)	أولمبياد الرياضيات 2015 الفرض الأول الجمعة 15 نونبر 2013	السنة الأولى علوم رياضية

Exercise 1

Soient p et q deux nombres réels tels que :

1) L'équation $x^2 + px + q = 0$ admet deux solutions reels x_1 et x_2

2) $|x_2 - x_1| = 1$

3) $|p - q| = 1$

Montrer que les nombres p, q, x_1 et x_2 sont des nombres entiers relatifs.

تمرين 1

ليكن p و q عددين حقيقين يحققان ما يلي :

1) المعادلة $x^2 + px + q = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2

2) $|x_2 - x_1| = 1$

3) $|p - q| = 1$

بين أن الأعداد p و q و x_1 و x_2 أعداد صحيحة نسبية.

Exercise 2

Déterminer toutes les nombres réels x, y et z qui vérifiant le systèmes d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0 \\ y^2 - 6z + 14 = 0 \\ z^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

تمرين 2

أوجد جميع الأعداد الحقيقية x و y و z التي تحقق :

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0 \\ y^2 - 6z + 14 = 0 \\ z^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

Exercise 3

Soient x, y et z les trois longueurs des cotes d'un triangle.

Sachant que $a \leq 2$, $b \leq 3$ et $c \leq 4$ déterminer le plus grande aire possible de ce triangle .

تمرين 3

ليكن a b c .

أوجد أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث إذا علمت أن $a \leq 2$ $b \leq 3$ $c \leq 4$

Exercise 4

Soit ABC un triangle , D et E deux points appartiens respectivement aux cotés $[BC]$ et $[AC]$ du triangle et tel que $(AD) \perp (BC)$ et $(DE) \perp (AC)$.
le cercle circonscrit au triangle ABD rencontre le segment $[BE]$ au point F (distinct de B) , la demi-droite $[AF)$ coupe le segment $[DE]$ au point P.

Montrer que : $\dfrac{DP}{PE} = \dfrac{CD}{DB}$

تمرين 4

ABC D E تنتميان إلى الضلعين $[BC]$ $[AC]$ على التوالي بحيث يكون $(AD) \perp (BC)$ $(DE) \perp (AC)$ ، الدائرة المحيطة بالمثلث ABD $[BE]$ F (B) ، نصف المستقيم $[AF)$ يقـ $[DE]$ $.P$

بين أن : $\dfrac{DP}{PE} = \dfrac{CD}{DB}$

هذه الصفحة هي نسخة تم إعادة تحريرها و ليست بنسخة أصلية

السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات 2015 الفرض الأول الجمعة 15 نونبر 2013 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2014/2013

تمرين 1 — Exercise 1

نعلم أن : $x_1 + x_2 = -p$ و $x_1 x_2 = q$

منه: $q - p = x_1.x_2 + x_1 + x_2$

$$\begin{cases} |q-p| = 1 \\ |x_1 - x_2| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_1.x_2 + x_1 + x_2| = 1 \\ |x_1 - x_2| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1.x_2 + x_1 + x_2)^2 = 1 \\ (x_1 - x_2)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x_1.x_2 + x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 0$$

منه :

$$\Rightarrow (x_1.x_2 + 2x_1)(x_1.x_2 + 2x_2) = 0 \Rightarrow x_1 x_2 (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \ ou \ x_1 = -2 \ ou \ x_2 = 0 \ ou \ x_2 = -2$$

- إذا كان : $x_1 = 0$ فإننا نستنتج أن : $\begin{cases} q = 0 \\ |p| = 1 \\ |x_2| = 1 \end{cases}$ مما يبين أن كل الأعداد المطلوبة صحيحة نسبية
- إذا كان : $x_1 = -2$ فإننا نستنتج أن : $|2 + x_1| = 1$ منه : $x_1 = -1$ أو $x_1 = -3$ منه : $x_1 \in Z$

  و منه: $p = -x_1 - x_2 = 2 - x_2 \in \{3;5\} \subset Z$ و $q = x_1 x_2 = -2x_2 \in \{2;6\} \subset Z$
- بالمثل (نظرا للتماثل)نجد نفس النتيجة في الحالتين المتبقيتين .

خلاصة: في جميع الحالات نجد أن الأعداد المطلوبة أعداد صحيحة نسبية.

رغم توصلنا لقيم صحيحة للأعداد المطلوبة منذ البداية $(x_1 = 0 \ ou \ x_1 = -2 \ ou \ x_2 = 0 \ ou \ x_2 = -2)$، لكن ذلك لا يعني نهاية الجواب لأن القيم المحصل عليها ليست قيما تأخذها هذه الأعداد في نفس الوقت ، أي أن الرابط ليس "الواو".

تمرين 2 — Exercise 2

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0 \\ y^2 - 6z + 14 = 0 \\ z^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 = 0$$

لدينا:

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 0$$

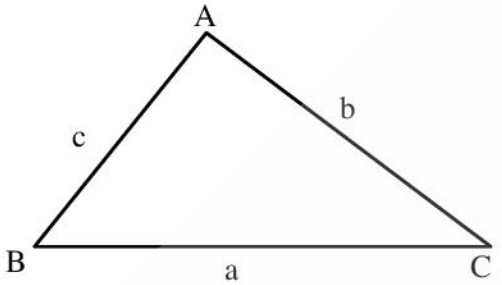
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

تمرين سهل طبقنا فيه الخاصية " إذا كان مجموع عدة أعداد حقيقية موجبة منعدما فإن كل الأعداد منعدمة"

Exercise 3 — تمرين 3

ليكن ABC مثلثا أطوال أضلاعه a و b و c حيث: $a \le 2$ و $b \le 3$ و $c \le 4$



لدينا: $S_{(ABC)} = \frac{1}{2}ab\sin\left(\hat{C}\right) \le \frac{ab}{2} \le 3$

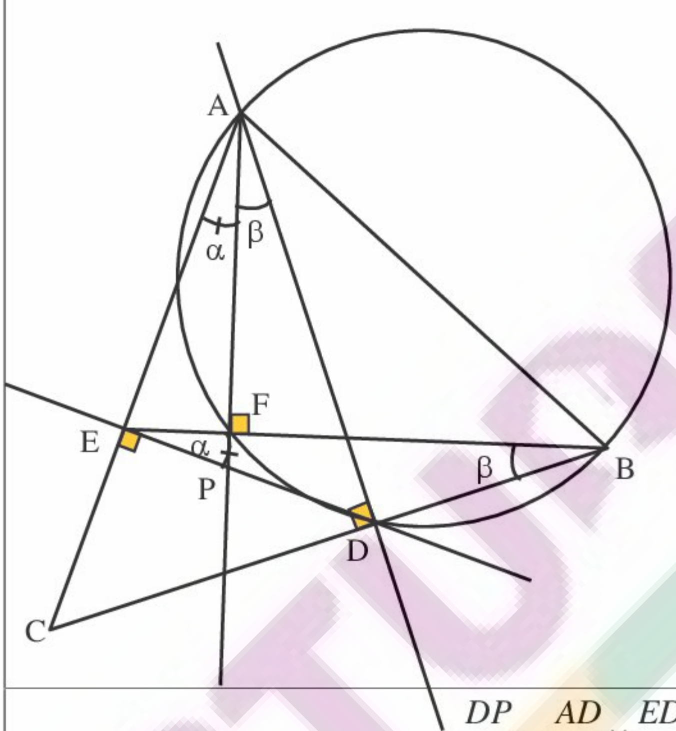
و بأخذنا: $a = 2 \le 2$ و $b = 3 \le 3$ و $c = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \le 4$

نحصل على مثلث قائم الزاوية في C تكون مساحته: $S_0 = \frac{ab}{2} = 3$

مما يعني أن المساحة $S_0 = 3$ هي أكبر مساحة ممكنة للمثلث ABC و التي يساويها عندما يكون قائم الزاوية.

استعمال صيغة هيرون يجعل التأطير صعبا و لا يفضي للقيمة القصوية، مع ذلك تبقى هذه الصيغة جد هامة
حل التمرين يكمن في أن تجعل المساحة مكبورة بعدد ثم تجد مثلثا يحقق الشروط و تكون مساحته هي هذا العدد.

Exercise 4 — تمرين 4



بداية نضع: $\alpha = E\hat{A}P$ و $\beta = D\hat{A}P$

بما أن الرباعي $AFDB$ دائري ، إذن بملاحظة زوايا محيطية تحصر نفس القوس .

فإننا نستنتج أن : $A\hat{F}B = A\hat{D}B = 90°$

و: $F\hat{B}D = \beta$ منه: $F\hat{E}P = 90° - E\hat{P}F = E\hat{A}P = \alpha$

الآن لدينا: في المثلثين APD و APE نجد:

$$\frac{AD}{\sin\left(A\hat{P}D\right)} = \frac{DP}{\sin(\beta)} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{\sin\left(A\hat{P}E\right)} = \frac{EP}{\sin(\alpha)}$$

منه : $\frac{AD}{AE} = \frac{DP}{EP}\times\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

(بقسمة المتساويتين طرفا بطرف)

منه : $\frac{DP}{EP} = \frac{AD}{AE}\times\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$

من جهة أخرى في المثلث : $\frac{ED}{DB} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$ ، منه : $\frac{DP}{EP} = \frac{AD}{AE}\times\frac{ED}{DB} = \frac{AD\times ED}{AE\times DB}$

من جهة أخرى لدينا : $\frac{CD}{AD} = \frac{ED}{AE} = \tan\left(E\hat{A}D\right)$ منه : $ED\times AD = CD\times AE$

بالتالي: $\frac{DP}{EP} = \frac{AD\times ED}{AE\times DB} = \frac{CD\times AE}{AE\times DB} = \frac{CD}{DB}$

الحلول المقترحة هي حلول شخصية و ليست حلولا رسمية