السنة الدراسية: 2015/2014 (مدة الإنجاز 3 ساعات و نصف)	أولمبياد الرياضيات 2016 الفرض الثالث الجمعة 16 يناير 2015	السنة الأولى علوم رياضية

Exercise 1 (MAC.MO) — تمرين 1

Exercise 1	تمرين 1
Soient a , b et c des nombres réels strictement positifs tels que $a\,b\,c=1$. - Montrer que : $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 3(a+b+c+1)$ - Pour quelles valeurs de a , b et c l'égalité a lieu ?	ليكن a و b و c أعدادا حقيقية موجبة قطعا بحيث $a\,b\,c=1$ - بين أن : $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 3(a+b+c+1)$ - متى يكون التساوي ؟

Exercise 2 (Beller.MO) — تمرين 2

Exercise 2	تمرين 2
On considère la suite numérique $(a_n)_{n\in IN^*}$ définie par : $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ et $a_n=\frac{a_{n-1}\,a_{n-2}+7}{a_{n-3}}$ pour tout $n\geq 4$ Montrer que tous les termes de la suite $(a_n)_{n\in IN^*}$ sont des entiers relatifs,(i.e : $\forall n\in IN^*,\ a_n\in Z$)	لتكن المتتالية العددية $(a_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة كما يلي : $a_1=1$ و $a_2=2$ و $a_3=3$ و $a_n=\frac{a_{n-1}\,a_{n-2}+7}{a_{n-3}}$ لكل $n\geq 4$. بين أن جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\in IN^*}$ هي أعداد صحيحة نسبية (أي $\forall n\in IN^*\ \ a_n\in Z$).

Exercise 3 (UKR.MO) — تمرين 3

Exercise 3	تمرين 3
Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe et inscriptible. X et Y sont deux points appartenant respectivement aux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ tel que le quadrilatère $ABXY$ soit un parallélogramme. Montrer que les deux cercles circonscrits respectivement aux triangles BXD et CYA ont le même rayon.	$ABCD$ رباعي محدب و دائري، X و Y نقطتان تنتميان على التوالي إلى القطرين $[AC]$ و $[BD]$ بحيث يكون الرباعي $ABXY$ متوازي أضلاع. بين أن الدائرة المحيطة بالمثلث BXD و الدائرة المحيطة بالمثلث CYA لهما نفس الشعاع.

هذه الصفحة هي نسخة تم إعادة تحريرها وليست بنسخة أصلية

السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات الفرض الثالث الجمعة 16 يناير 2015 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2015/2014
	رياضيات النجاح	

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : $abc=1$ إذن : $\frac{a}{b}=a^2c$ و $\frac{b}{c}=b^2a$ و $\frac{c}{a}=c^2b$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}+b^2+2\frac{b}{c}+\frac{1}{c^2}+c^2+2\frac{c}{a}+\frac{1}{a^2}$$

إذن :
$$=a^2+2a^2c+\frac{1}{b^2}+b^2+2b^2a+\frac{1}{c^2}+c^2+2c^2b+\frac{1}{a^2}$$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}\right)+\left(b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}\right)+\left(c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2a+c^2b+a^2c\right)$$

ونعلم أن : $(x+y+z)^3\geq 27\,xyz \quad \forall\,(x,y,z)\in\left(IR^+\right)^3$

إذن : $\left(a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}\right)^3\geq 27a^3$ منه : $a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}\geq 3a$ و بالمثل : $b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}\geq 3b$ و $c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}\geq 3c$

و أيضا : $\left(b^2a+c^2b+a^2c\right)^3\geq 27\,b^3a^3c^3\geq 27$ منه : $b^2a+c^2b+a^2c\geq 3$

بالتالي : $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 3(a+b+c+1)$

لدينا :
$$A=\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2-3(a+b+c+1)$$
$$A=\left(a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}-3a\right)+\left(b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}-3b\right)+\left(c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}-3c\right)+\left(b^2a+c^2b+a^2c-3\right)$$

بما أن : $a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}-3a\geq 0$ و $b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}-3b\geq 0$ و $c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}-3c\geq 0$ و $b^2a+c^2b+a^2c-3\geq 0$

فإن:
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=3(a+b+c+1)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2a+\frac{1}{b^2}=3a\\ b^2+c^2b+\frac{1}{c^2}=3b\\ c^2+a^2c+\frac{1}{a^2}=3c\\ b^2a+c^2b+a^2c=3\end{cases}$$

و نعلم أن : $\left((x+y+z)^3=27\,xyz\Leftrightarrow x=y=z\right)\quad\forall\,(x,y,z)\in\left(IR^+\right)^3$

إذن :
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=3(a+b+c+1)\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2a=\frac{1}{b^2}\\ b^2=c^2b=\frac{1}{c^2}\\ c^2=a^2c=\frac{1}{a^2}\\ b^2a=c^2b=a^2c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$$

الأفضل استعمال المتفاوتة $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{x\,y\,z}\quad\forall\,(x,y,z)\in\left(IR^+\right)^3$ ، لكنها تتضمن مفهوم الجذر المكعب الشبيه في

تعريفه بالجذر مربع، لذلك آثرت استعمال متفاوتة شبيهة تتضمن مفاهيم معروفة.

المتفاوتات $(x+y+z)^3 \geq 27\,x\,y\,z$ و $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{x\,y\,z}$ أو أيضا $x^3+y^3+z^3 \geq 3\,x\,y\,z$ يمكن استعمالهما دون برهان في الأولمبياد، لكن من المفيد البحث عن برهانهما

المطلوب في السؤال الثاني إثبات حالة التساوي و ليس فقط ذكرها، لذلك استعملنا الخاصية: «يكون مجموع عدة أعداد موجبة منعدما إذا وفقط إذا كانت جميع هذه الأعداد منعدمة»

تمرين 2 — Exercise 2

بداية لدينا : $a_4 = \dfrac{a_3\,a_2+7}{a_1} = 13$

لدينا لكل $n \geq 4$: $a_n = \dfrac{a_{n-1}\,a_{n-2}+7}{a_{n-3}}$ منه : $a_n\,a_{n-3} = a_{n-1}\,a_{n-2}+7$ منه : $\begin{cases} a_n\,a_{n-3} = a_{n-1}\,a_{n-2}+7 \\ a_{n+1}\,a_{n-2} = a_n\,a_{n-1}+7 \end{cases}$

منه : $a_n\,a_{n-3} - a_{n+1}\,a_{n-2} = a_{n-1}\,a_{n-2} - a_n\,a_{n-1}$ منه : $a_n\,a_{n-3} + a_n\,a_{n-1} = a_{n-1}\,a_{n-2} + a_{n+1}\,a_{n-2}$

منه: $a_n\left(a_{n-3}+a_{n-1}\right) = a_{n-2}\left(a_{n-1}+a_{n+1}\right)$ منه : $\dfrac{a_{n-3}+a_{n-1}}{a_{n-2}} = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}$

الآن و باعتبار المتتالية : $u_n = \dfrac{a_{n-3}+a_{n-1}}{a_{n-2}}$ نستنتج أن : $\forall n \geq 4 \quad u_{n+2} = u_n$

إذن المتتاليتان $(v_n)_{n\geq 2}$ و $(w_n)_{n\geq 2}$ المعرفتان بـ: $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ ثابتتان (لأن $\begin{cases} v_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n} = v_n \\ w_{n+1} = u_{2n+3} = u_{2n+1} = w_n \end{cases}$ $\forall n \geq 2$)

منه : $\begin{cases} v_n = v_2 = u_4 = \dfrac{a_1+a_3}{a_2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ w_n = w_2 = u_5 = \dfrac{a_2+a_4}{a_3} = \dfrac{2+13}{3} = 5 \end{cases}$ $\forall n \geq 4$ منه : $\forall n \geq 4 \quad u_n \in IN$

الآن لدينا : $\forall n \geq 4 \quad a_{n-1} = a_{n-2}\,u_n - a_{n-3}$ أو أيضا $\forall n \geq 1 \quad a_{n+2} = a_{n+1}\,u_{n+3} - a_n$

إذن للبرهان على النتيجة المطلوبة سنستعمل برهانا بالترجع من الرتبة الثانية

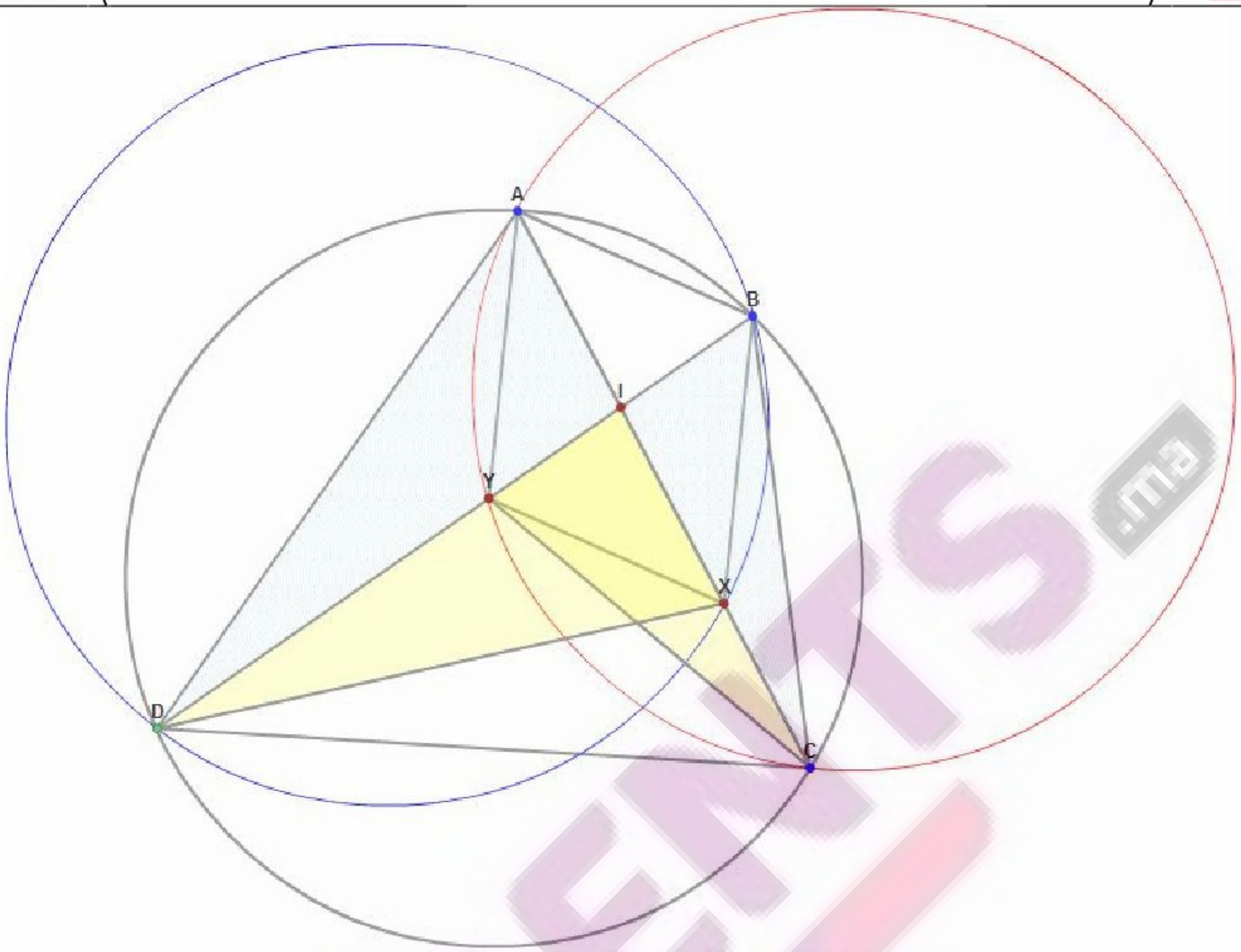
- لدينا : $a_1 \in Z$ و $a_2 \in Z$
- نفترض أن $a_n \in Z$ و $a_{n+1} \in Z$ ونبين أن : $a_{n+1} \in Z$ و $a_{n+2} \in Z$

$a_{n+1} \in Z$ محققة من الافتراض

بما أن : $a_{n+2} = a_{n+1}\,u_{n+3} - a_n$ ، إذن $\begin{cases} a_{n+1} \in Z \\ u_{n+3} \in Z \Rightarrow a_{n+2} \in Z \\ a_n \in Z \end{cases}$ و هذا ينهي البرهان.

لمزيد من التفاصيل حول أنواع الترجع خصوصا الترجع القوي (Récurrence forte) يمكن زيارة الرابط :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Raisonnement_par_r%C3%A9currence



نعلم أنه إذا كان مثلث MNP محاطا بدائرة شعاعها R فإن : $\frac{\sin(\hat{M})}{NP}=\frac{\sin(\hat{N})}{MP}=\frac{\sin(\hat{P})}{MN}=\frac{1}{2R}$

إذن للبرهان أن الدائرة المحيطة بالمثلث BXD لها نفس شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث AYC يجب أن نبين أن :

$\frac{\sin(B\hat{D}X)}{BX}=\frac{\sin(Y\hat{C}A)}{AY}$ و لكون $AY=BX$ فذلك يعني أنه يجب أن نبين أن : $\sin(Y\hat{C}A)=\sin(B\hat{D}X)$

خلال حل التمرين سنعتبر I مركز متوازي الأضلاع $ABXY$

الآن ، لدينا في الدائرة المحيطة بالرباعي $ABCD$ ، $[D\hat{A}C]$ و $[D\hat{B}C]$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس ، إذن $D\hat{A}C=D\hat{B}C$ و بما أن : $A\hat{I}D=B\hat{I}C$ فسنستنتج أن المثلثين AID و BIC متشابهان

إذن : $\frac{ID}{IC}=\frac{IA}{IB}$ منه : $\frac{ID}{IC}=\frac{IX}{IY}$ (لأن : $IX=IA$ و $IY=IB$) و بما أن $X\hat{I}Y$ زاوية مشتركة بين المثلثين IYC و IXD فإنهما متشابهان

إذن : $Y\hat{C}A=B\hat{D}X$ إذن : $\sin(Y\hat{C}A)=\sin(B\hat{D}X)$ ، و هذا ينهي البرهان

لمزيد من التفاصيل حول حالات تشابه مثلثين يمكن زيارة الرابط : http://goo.gl/F7s8Ck

فيما يخص النقطتين X و Y ، بما أن $ABXY$ متوازي أضلاع فهذا يعني أن : $Y=T(X)$ حيث T هي الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BA}$

بما أن $X\in(AC)$ فإن: $Y\in T((AC))$ و لدينا : $Y\in[BD]$ ، إذن : $Y=[BD]\cap T((AC))$

و هذا يكون إنشاء النقطتين X و Y كما يلي:

ننشئ E مماثلة B بالنسبة لـ A ، ($E=T(A)$)، ننشئ (Δ) المار من E و الموازي لـ (AC) ، ($(\Delta)=T((AC))$)

Y هي نقطة تقاطع (Δ) و $[BD]$ و X هي النقطة التي تحقق $\overrightarrow{YX}=\overrightarrow{AB}$