السنة الدراسية: 2016/2015 (مدة الإنجاز 3 ساعات و نصف)	أولمبياد الرياضيات 2017 الفرض الأول الجمعة 11 دجنبر 2015	السنة الأولى علوم رياضية

Exercise 1

Les nombres réels x_1, x_2 et x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) sont solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 + (a+2)x - a = 0$ avec a un nombre réel donné.
Trouver toutes les valeurs possibles de l'expression $4x_1 - x_1^2 + x_3^2$

تمرين 1

الأعداد الحقيقية x_1 و x_2 و x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) هي حلول المعادلة $x^3 - 3x^2 + (a+2)x - a = 0$، حيث a عدد حقيقي معلوم.

أوجد جميع القيم الممكنة للتعبير $4x_1 - x_1^2 + x_3^2$

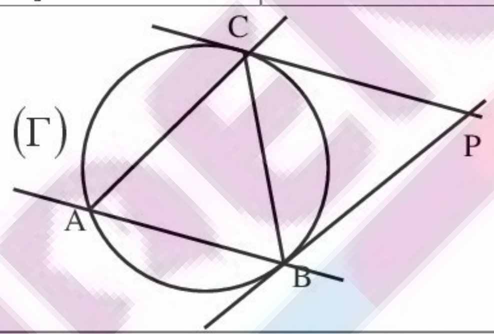
Exercise 2

Soient A, B et C trois points d'un cercle (Γ), et P le point d'intersection des deux droites tangentes au cercle (Γ) aux points B et C respectivement.(Voir figure).
On suppose que les deux droites (AB) et (CP) sont parallèles et que $AB = 3$ et $BP = 4$.
Calculer la longueur du segment $[BC]$.

تمرين 2

لتكن A و B و C ثلاث نقط من دائرة (Γ)، و P نقطة تقاطع المستقيمين المماسين للدائرة (Γ) في النقطتين B و C على التوالي .(انظر الشكل).

نفترض أن المستقيمين (AB) و (CP) متوازيان و أن $AB = 3$ و $BP = 4$. احسب طول القطعة $[BC]$



Exercise 3

Soient a , b , c et d des nombres réels appartenant à l'intervalle $[1;2]$.

1) Montrer que : $|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)| \leq \dfrac{abcd}{4}$
2) Pour quelles valeurs de a , b , c et d l'égalité a lieu ?

تمرين 3

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية تنتمي إلى المجال $[1;2]$.

1) بين أن : $|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)| \leq \dfrac{abcd}{4}$
2) عند أي قيم لـ a و b و c و d يتحقق التساوي ؟

السنة الأولى علوم رياضية

أولمبياد الرياضيات 2017

الفرض الأول

الجمعة 11 دجنبر 2015

حلول مقترحة

السنة الدراسية: 2016/2015

تمرين 1 — Exercise 1

بداية وبملاحظة أن 1 حل للمعادلة $x^3-3x^2+(a+2)x-a=0$ ، نستنتج أن الحدودية $P(x)=x^3-3x^2+(a+2)x-a$ تقبل القسمة على $x-1$ ، بعد إجراء القسمة الاقليدية نجد: $P(x)=(x-1)(x^2-2x+a)$

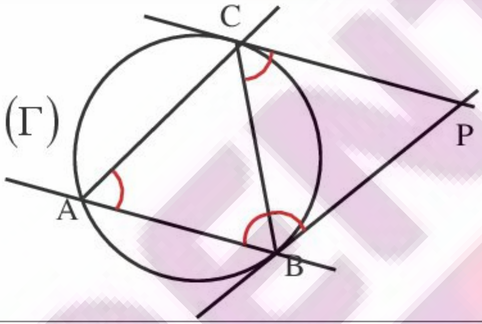
حسب المعطيات المعادلة $x^2-2x+a=0$ ستقبل حلين α و β حيث $\{\alpha,\beta\}\subset\{x_1,x_2,x_3\}$ و $\alpha<\beta$

و نعلم أن: $\alpha+\beta=2$ إذن $2\alpha<\alpha+\beta<2\beta$ منه $\alpha<1<\beta$

بالتالي: $x_1=\alpha$ و $x_2=1$ و $x_3=\beta$

الآن نجيب عن السؤال: $4x_1-x_1^2+x_3^2=4\alpha-\alpha^2+\beta^2=4\alpha+(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=4\alpha+2(\beta-\alpha)=2\alpha+2\beta=4$

تمرين 2 — Exercise 2



لدينا $C\hat{A}B=B\hat{C}P=C\hat{B}P$ ثلاث زوايا محيطية تحصر القوس BC (عند وجود مماس يكون هناك أيضا زاوية محيطية تحصر قوسا)

وبما أن $(AB)//(CP)$ و (CB) قاطع لهما فإن: $C\hat{B}A=B\hat{C}P$

منه: $C\hat{A}B=B\hat{C}P=C\hat{B}P=C\hat{B}A$ ، إذن المثلثان PCB و ABC متشابهان ($C\hat{A}B=B\hat{C}P$ و $C\hat{B}P=C\hat{B}A$)

إذن: $\frac{BC}{AB}=\frac{BP}{BC}$ منه: $\frac{BC}{3}=\frac{4}{BC}$ منه: $BC^2=12$ بالتالي: $\boxed{BC=\sqrt{12}}$

للمزيد عن الزوايا المحيطية تصفح الرابط: http://goo.gl/qKYKlU

وللمثلثات المتشابهة الرابط: http://goo.gl/F7s8Ck

تمرين 3 — Exercise 3

لدينا:

$$|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)|\le\frac{abcd}{4}\Leftrightarrow\left|\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{b-c}{\sqrt{bc}}\right)\left(\frac{c-d}{\sqrt{cd}}\right)\left(\frac{d-a}{\sqrt{ad}}\right)\right|\le\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left|\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{c}{d}}-\sqrt{\frac{d}{c}}\right)\left(\sqrt{\frac{d}{a}}-\sqrt{\frac{a}{d}}\right)\right|\le\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

إذن لإثبات المتفاوتة يكفي أن نبين أن: $\left|\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\forall(x,y)\in[1,2]^2$

بالفعل لدينا : $(x,y)\in[1,2]^2 \Rightarrow \begin{cases}1\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1\le x\le 2\\ \frac{1}{2}\le\frac{1}{y}\le 1\\ \frac{1}{2}\le\frac{1}{x}\le 1\\ 1\le y\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}\le\frac{x}{y}\le 2\\ \frac{1}{2}\le\frac{y}{x}\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sqrt{\frac{x}{y}}\le\sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\le\sqrt{\frac{y}{x}}\le\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sqrt{\frac{x}{y}}\le\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\le-\sqrt{\frac{y}{x}}\le\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\le\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}\le\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\le\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left|\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$$

و هذا ينهي البرهان.

التساوي يتحقق إذا كان $\left|\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right|=\left|\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right|=\left|\sqrt{\frac{c}{d}}-\sqrt{\frac{d}{c}}\right|=\left|\sqrt{\frac{d}{a}}-\sqrt{\frac{a}{d}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ولدينا : $\left|\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$

نضع : $t=\frac{x}{y}$: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left(t=2 \ ou \ t=\frac{1}{2}\right)$

منه : $\left|\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}=2 \ ou \ \frac{y}{x}=2\right) \Leftrightarrow (x=2y \ ou \ y=2x)$

ولكون : $(x,y)\in[1,2]^2$ فإن : $x=2y \Rightarrow 2y\le 2 \Rightarrow 1\le y\le 1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=2$ بالمثل : $y=2x \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=2$

منه : $\left|\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (x,y)\in\{(1,2);(2,1)\}$

إذن المتساوية تتحقق إذا كان $(a,b)\in\{(1,2);(2,1)\}$ و $(b,c)\in\{(1,2);(2,1)\}$ و $(c,d)\in\{(1,2);(2,1)\}$ و $(d,a)\in\{(1,2);(2,1)\}$

مما يعني أن : $(a,b,c,d)=(1,2,1,2)$ أو $(a,b,c,d)=(2,1,2,1)$

في المعادلة أعلاه استعملنا المحددة لإيجاد حلولها

الحلول المقترحة هي حلول شخصية وليست حلولا رسمية