السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات	سلسلة 2

التمارين مستخرجة من الكتاب المدرسي المفيد في الرياضيات-التحليل

تمرين 1 : ليكن a عددا حقيقيا موجبا بحيث : $a^5 - a^3 + a \geq 3$.

بين أن : $a^6 \geq 5$

تمرين 2 : لتكن a و b و c هي قياسات أضلاع مثلث.

بين أن : $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

تمرين 3 : a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية بحيث : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

بين أن : $\frac{-1}{2} \leq ab + bc + ac \leq 1$

تمرين 4 : a و b و c أعداد حقيقية موجبة بحيث : $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 2$

بين أن : $\sqrt{a+b+c+3} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

تمرين 5 : x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا و تحقق : $x \geq y \geq z$

بين أن : $x^2 \frac{y}{z} + y^2 \frac{z}{x} + z^2 \frac{x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$

تمرين 6 : لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث: $a \geq b \geq c$ و $a+b+c=1$

بين أن : $a\sqrt{\frac{b}{c}} + b\sqrt{\frac{c}{a}} + c\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 1$

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات حلول مقترحة	سلسلة 2

التمارين مستخرجة من الكتاب المدرسي المفيد في الرياضيات-التحليل

تمرين 1 :

لدينا: $a^5-a^3+a\geq 3$ منه : $a(a^4-a^2+1)\geq 3$ منه : $\left((a^2)^2-a^2+1\right)\geq \frac{3}{a}$

منه : $\frac{(a^2)^3+1}{a^2+1}\geq\frac{3}{a}$ (استعملنا المتطابقة : $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$)

منه : $a^6+1\geq 3\left(\frac{a^2+1}{a}\right)$ منه : $a^6\geq 3\left(a+\frac{1}{a}\right)-1$

و بما أن: $a+\frac{1}{a}\geq 2$ (متفاوتة هامة يمكن البرهان عليها بسهولة : $a>0\Rightarrow a+\frac{1}{a}-2=\frac{(a-1)^2}{a}\geq 0$)

فإن : $a^6\geq 6-1$ بالتالي: $\boxed{a^6\geq 5}$

تمرين 2 :

بما أن a و b و c هي قياسات أضلاع مثلث فإن : $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ و $b+c>a$ و $c+a>b$ و $a+b>c$

نضع : $\begin{cases}x=b+c-a\\ y=c+a-b\\ z=a+b-c\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x+y=2c\\ y+z=2a\\ x+z=2b\end{cases}$ منه :

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}&=\frac{\frac{y+z}{2}}{x}+\frac{\frac{x+z}{2}}{y}+\frac{\frac{x+y}{2}}{z}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\\&\geq\frac{1}{2}(2+2+2)\\&\geq 3\end{aligned}$$

تذكر المتفاوتات الهامة : $x+\frac{1}{x}\geq 2$ $\forall x>0$ ، $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ $\forall a>0\ \forall b>0$

و التي هي مجرد حالات خاصة للمتفاوتة : $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ $\forall(a,b)\in I\!R_+^2$

تمرين 3 :

لدينا : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

منه : $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\geq 0$ منه : $1+2(ab+ac+bc)\geq 0$ منه : $ab+bc+ac\geq\frac{-1}{2}$

من جهة أخرى نعلم أن : $a^2+b^2\geq 2ab$ و $a^2+c^2\geq 2ac$ و $b^2+c^2\geq 2bc$

بجمع هذه المتفاوتات نجد : $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2ac+2bc$

منه : $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ منه : $1\geq ab+ac+bc$ ، بالتالي : $\boxed{\frac{-1}{2}\leq ab+bc+ac\leq 1}$

تمرين 4 :

المتفاوتة المطلوب إثباتها غير صحيحة.

مثال مضاد : نأخذ $a=b=c=\frac{3}{4}>0$ ، لدينا : $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{\frac{6}{4}}\times 3=2$

لكن : $\sqrt{a+b+c+3}=\sqrt{\frac{3}{4}\times 3+3}=\sqrt{\frac{9}{4}+3}=\frac{\sqrt{21}}{2}$ و $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{\frac{3}{4}}\times 3=\frac{\sqrt{27}}{2}$

منه : $\sqrt{a+b+c+3}<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

- قد يكون هناك خطأ مطبعي في أحد المعطيات، حتى بعكس المتفاوتة يمكننا إيجاد مثال مضاد على عدم صحتها (نأخذ : $a=0$ و $b=c=\frac{5}{4}>0$)
- لقد آثرت إدراج التمرين رغم علمي بخطأ المعطيات حتى يألف التلميذ تقصي صحة التمرين من خطأه خصوصا التمارين الموجود على الأنترنيت و التي قد تكون مقترحة فقط و ليست رسمية، نادرا جدا ما قد يكون هناك خطأ في معطيات تمارين الأولمبياد الوطنية (على الأقل لم يسبق لي أن وقعت في مثل هذه الحالة، لكنني توصلت عبر الأنترنيت ببعض الحالات) نظرا لأن واضعي التمارين هم أساتذة مختصون يقومون بتحليل التمرين و تمحيصه مرارا قبل المصادقة عليه، إن وجد خطأ ففي الغالب يكون خطأ مطبعيا يصعب اكتشافه إلا بعد الانكباب على إنجازه.

تمرين 5 :

$$x^2\frac{y}{z}+y^2\frac{z}{x}+z^2\frac{x}{y}\geq x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow \frac{x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2}{xyz}\geq x^2+y^2+z^2$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\geq x^3yz+y^3xz+z^3xy$$
$$\Leftrightarrow x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2-x^3yz-y^3xz-z^3xy\geq 0$$

نضع : $P=x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2-x^3yz-y^3xz-z^3xy^2$ و لنبين إذن أن $P\geq 0^2$

و : $a=x-y$ و $b=y-z$ إذن و حسب المعطيات $x\geq y\geq z\geq 0$ نستنتج أن : $a\geq 0$ و $b\geq 0$

و أيضا : $y=b+z$ و $x=a+y=a+b+z$

منه :

$$P=x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2-x^3yz-y^3xz-z^3xy^2$$
$$P=x^3y^2-x^3yz+y^3z^2-y^3xz+z^3x^2-z^3xy^2$$
$$P=x^3y(y-z)+y^3z(z-x)+z^3x(x-y)$$
$$P=x^3(b+z)b+y^3z(-a-b)+z^3(a+y)a$$
$$P=x^3b^2+x^3zb-y^3za-y^3zb+z^3a^2+z^3ya$$
$$P=x^3b^2+a^2z^3+x^3zb-y^3zb+z^3ya-y^3za$$
$$P=x^3b^2+a^2z^3+zb(x-y)(x^2+xy+y^2)+zya(z^2-y^2)$$
$$P=x^3b^2+a^2z^3+abz(x^2+xy+y^2)+zya(z-y)(z+y)$$
$$P=x^3b^2+a^2z^3+abz(x^2+xy+y^2)-zyab(z+y)$$
$$P=x^3b^2+a^2z^3+abzx^2+abzxy+abzy^2-z^2yab-zy^2ab$$
$$P=x^3b^2+a^2z^3+abzx^2+abzy(x-z)$$
$$P=x^3b^2+a^2z^3+abzx^2+abzy(a+b)$$

منه : $P\geq 0$ و هذا ينهي البرهان.

- لاحظ الدور الذي لعبه الوضعان $a=x-y$ و $b=y-z$ في استغلال المعطى $x\geq y\geq z$ ، فبدونهما الأمر جد معقد لكنه ممكن.
- قد تكون هناك طرق أخرى لم أتوصل لها لحل التمرين.

تمرين 6 :

نضع : $x=\sqrt{a}$ و $y=\sqrt{b}$ و $z=\sqrt{c}$ ، إذن : $a\geq b\geq c\geq 0 \Rightarrow x\geq y\geq z\geq 0$

إذن حسب نتيجة التمرين السابق: $x^2\frac{y}{z}+y^2\frac{z}{x}+z^2\frac{x}{y}\geq x^2+y^2+z^2$

أي: $a\sqrt{\frac{b}{c}}+b\sqrt{\frac{c}{a}}+c\sqrt{\frac{a}{b}}\geq a+b+c$ ، بالتالي : $a\sqrt{\frac{b}{c}}+b\sqrt{\frac{c}{a}}+c\sqrt{\frac{a}{b}}\geq 1$

بدون التمرين السابق التمرين يعتبر صعبا للغاية.