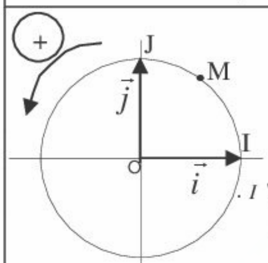
الحساب المثلثي

I- الأفاصيل المنحنية



1) *) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها 1

*)نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

*) الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I.

2) لتكن M نقطة من U . للحصول على أفصول منحني لــ M .

نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.

ليكن α طول هذه القوس.

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول منحني للنقطة M .

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة M .

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).

وإذا كان α أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) يكون العددان α وβ أفصولين منحنيين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة: 1)
$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$
$\Leftrightarrow$ (α وβ أفصولين منحنيين لنفس النقطة)

2) *) $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\ \ [2\pi]$

*) $\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\ \ [2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحني وحيد α_0 يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$. α_0 يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M

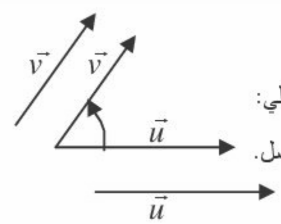
(ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو n . ومن أجل إنشائها يكفي تعويض k ب n قيمة متتابعة. عادة نعوض k بالقيم $2,1,0.....,(n-1)$

وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U .

II- قياس الزوايا الموجهة



1) لتكن $\vec{u},\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.

من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{v},\vec{u})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:

*) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

*) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما

(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن α هذا القياس.

← إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب

$(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv\alpha[2\pi]$.

← إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.

ونكتب $(\overline{\vec{u},\vec{v}})=-\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-\alpha[2\pi]$.

2) خاصيات.

a) من بين قياسات $(\overline{\vec{u},\vec{v}})$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\leq\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv(\overline{\vec{u},\vec{w}})+(\overline{\vec{w},\vec{v}})\ [2\ ]$ (علاقة شال).

c) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-(\vec{v},\vec{u})\ \ [2\pi]$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون αوβ قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

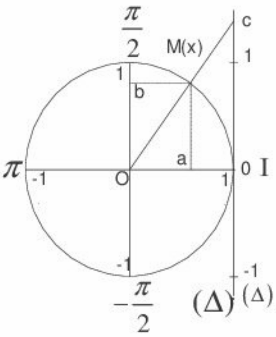
ملاحظة:

1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III- الدوال المثلثية



1)تعريف

لتكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I .

وليكن (Δ) المحور المماس ل U في I .

ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصله I .

*) ليكن x من $\mathbb{R}$ و M النقطة التي أفصولها المنحني هو x

ليكن a أفصول ل M و b

ارتوب M يعني $M(a,b)$.

c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ)

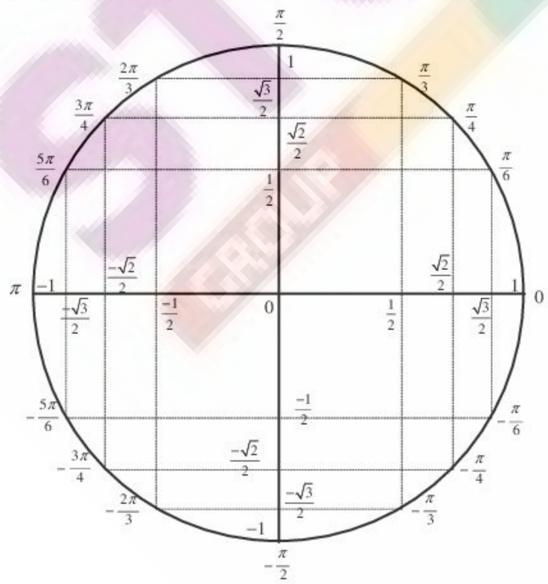
لدينا

$$\cos x=a \qquad \sin x=b \qquad \tan x=c$$

2) خاصيات

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	╳	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ يعني $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

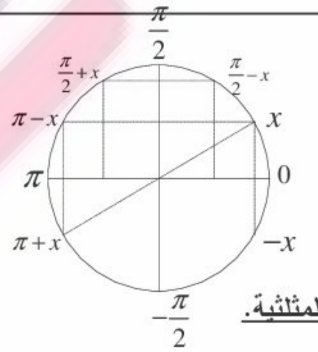
d) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ $\quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$ $\quad \tan(x + k\pi) = \tan x$

e) $\cos(-x) = \cos x$ $\quad \sin(-x) = -\sin x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$

f)
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x$$

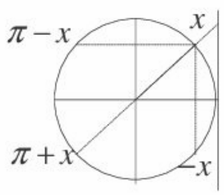
g)
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

h) $(\forall x \in \mathbb{R}) : -1 \leq \cos x \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \sin x \leq 1$



3) المعادلات المثلثية.

a)
$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$$
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \qquad \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$



b)
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$
$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

c) $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

ملاحظات.

1) إذا كان $\alpha \notin [-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x = a$ و $\sin x = a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x)) = a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \text{ معرفة} \\ u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

3) $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$ $\quad -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ $\quad -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$
$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\quad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

1) نضع $f(x) = a\cos(u(x)) + b$ أو $f(x) = a\sin(u(x)) + b$

*) إذا كان a و b غير متقابلين و غير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$

*) إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x) : a\tan(u(x)) + b$ $\quad f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

5) صيغ التحويل

a)
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

b)
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

c)
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$
$$\sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin(2a)$$

d)
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

e)
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}$$

f) نضع $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$: لدينا .

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

g) من أجل تحويل $f(x) = a\cos x + b\sin x$ نتبع ما يلي:

$$f(x) = a\cos x + b\sin x$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - \alpha)$$

مع $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$