الجداء السلمي - الدائرة

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

I) تحليلية الجداء السلمي

1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x',y')$

لدينا $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ و $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) نعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ و $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

4)

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.

b) $\sin(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\det(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ $\qquad$ $\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

c) $\cos(B\hat{A}C)=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}$

d) $\sin(B\hat{A}C)=\left|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|=\left|\frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{AB\cdot AC}\right|$.

ملاحظة:

a) إذا أردنا تحديد قياسا للزاوية الهندسية $B\hat{A}C$ يكفي حساب $\cos(B\hat{A}C)$

نجد مثلا: $\cos(B\hat{A}C)=-\frac{1}{2}$

يعني $\cos(B\hat{A}C)=\cos\frac{2\pi}{3}$

إذن $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$.

b) إذا أردنا تحديد قياس الزاوية الموجهة $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ نقوم بحساب

$\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ و $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

نجد مثلا: $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

ومن أجل تحديد قياس الزاوية نتبع ما يلي:

$\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ يعني $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\cos\frac{3\pi}{4}$

يعني $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ أو $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

ولدينا $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})<0$

إذن $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

يعني $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

5) المستقيم في المستوى

a) ليكن (D) مستقيم و $\vec{n}$ متجهة. نقول إن المتجهة $\vec{n}$ منظمية على (D) إذا كان حامل $\vec{n}$ عمودي على (D) **(يعني** $(D)\perp\vec{n}$**)**.

b) نعتبر المستقيم: $(D):ax+by+c=0$

لدينا $\vec{u}(-b,a)$ موجهة ل (D) و $\vec{n}(a,b)$ منظمية على (D).

c) معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

مثال: حدد المعادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من $A(1,2)$ والمتجهة $\vec{n}(-3,4)$ منظمية عليه.

طريقة 1.

$$M(x,y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow-3(x-1)+4(y-2)=0$$

إذن $(D):-3x+4y-5=0$

طريقة 2. لدينا $\vec{n}(-3,4)$ منظمية على (D) إذن معادلة (D) على شكل $(D):-3x+4y-5=0$ ولدينا $A(1,2)$ إذن $(-3)\cdot1+4(2)+c=0$ يعني $c=-5$ إذن $(D):-3x+4y-5=0$.

d) ليكن (D) مستقيم مار من A و $\vec{n}$ منظمية عليه.

و (D') مستقيم مار من A' و $\vec{n}'$ منظمية عليه.

*) يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذاكان $\vec{n}\perp\vec{n}'$ يعني $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$.

*) يكون $(D)/\!/(D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}/\!/\vec{n}'$ يعني $\det(\vec{n}\cdot\vec{n}')=0$.

e) نعتبر المستقيمين: $(D):ax+by+c=0$ $\quad$ $(D'):a'x+b'y+c'=0$

*) يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذا كان $aa'+bb'=0$.

*) يكون $(D)/\!/(D')$ إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}=0$

f) مسافة نقطة عن مستقيم.

i) ليكن (D) مستقيم و A نقطة من المستوى.

نسمي مسافة A عن (D) العدد الذي نرمز له ب $d(A,(D))$ والمعرف بما يلي $d(A,(D))=AH$ حيث H هي المسقط العمودي ل A على (D).

ii) نعتبر المستقيم $(D):ax+by+c=0$ والنقطة $A(x_0,y_0)$

لدينا $d(A,(D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ملاحظة: مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي أصغر مسافة بين A ونقط المستقيم (D).

g) واسط القطعة $[AB]$ هو المستقيم المار من I منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{AB}$ منظمية عليه.

h) *) مركز ثقل المثلث (ABC) هو تقاطع المتوسطات.

*) مركز تعامد المثلث (ABC) هو تقاطع الارتفاعات.

*) مركز الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع الواسطات.

*) مركز الدائرة المحاطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع المنصفات.

II) دراسة تحليلية للدائرة.

1) الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة M التي تحقق $\Omega M = r$.

2) معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هي $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

3) نعتبر المجموعة (Γ) التيمعادلتها $(\Gamma): x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$
من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان:

ط1: نضع $a=-\frac{\alpha}{2}$ $b=-\frac{\beta}{2}$ $c=\gamma$ ونقوم بحساب a^2+b^2-c

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c\langle 0}$ فإن $\Gamma=\varnothing$

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c=0}$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b)\}$

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c\rangle 0}$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

ط2: نقوم بتحويل المعادلة لنرجعها على شكل $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ باستعمال بداية متطابقة هامة $\boxed{X^2+\alpha X=\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$.

*) إذا كان $k\langle 0$ فإن $(\Gamma)=\varnothing$.

*) إذا كان $k=0$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b)\}$.

*) إذا كان $k\rangle 0$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r=\sqrt{k}$.

4) **معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها.**

لتكن (ℓ) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (ℓ) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة: $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

ط2: نتبع ما يلي: $M(x,y)\in(\ell)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_B\\ y-y_B\end{pmatrix}$

ملاحظة: إذا كان (ABC) قائم الزاوية في A فإن الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. مركزها هو منتصف $[BC]$ شعاعها هو $\frac{BC}{2}$.

5) **تمثيل بارامتري لدائرة.**

تمثيل بارامتري للدائرة (ℓ) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هو $(\theta\in\mathbb{R})$ $(C):\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$.

6) **داخل خارج دائرة:**

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r معادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ونعتبر النقطة $M(\alpha,\beta)$.

*) تكون M خارج الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:
$\Omega M\rangle 0$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c\rangle 0$

*) تكون M داخل الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:
$\Omega M\langle 0$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c\langle 0$.

*) $M\in(C)$ إذا وفقط إذا كان $\Omega M=r$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c=0$.

7) **تقاطع مستقيم ودائرة.**

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$
ونعتبر المستقيم $(\Delta):\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

من أجل دراسة تقاطع (C) و (Δ) نقوم بحساب $d(\Omega,(\Delta))$.

a) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))\rangle r}$ فإن (Δ) يوجد خارج (C) وبالتالي لا يقطع (C).

b) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))=r}$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطة واحدة A.
ونقول في هذه الحالة إن (Δ) مماس ل (C) في النقطة A و A تسمى نقطة التماس.
وللحصول على نقطة التماس نقوم بحل النظمة $\begin{cases}x^2+y^2+ax+by=0\\ \alpha x+\beta y+\gamma=0\end{cases}$.

c) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))\langle r}$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطتين A و B، وللحصول على احداثيات النقطتين A و B نقوم بحل النظمة $\begin{cases}x^2+y^2+ax+by=0\\ \alpha x+\beta y+\gamma=0\end{cases}$.

8) **معادلة مماس لدائرة.**

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ وليكن (T) المماس ل (C) في النقطة $A(x_0,y_0)$.

للحصول على معادلة (T) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة $(T): x_0x+y_0y+\frac{a}{2}(x_0+x)+\frac{b}{2}(y_0+y)+c=0$

ط2: (T) هو المستقيم المار من Ω والمتجهة $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه.

ملاحظة: يكون (T) مماسا ل (C) في A إذا وفقط إذا كان (T) عموديا على (ΩA) في A.