

دراسة الدوال

4 اشتقاق دالة على مجال - الدالة المشتقة

(a) نقول إن f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I

(b) نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a, b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a, b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

(c) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن الدالة $f': x \rightarrow f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة

(d) إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة المشتقة للدالة f' تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'' .

(e) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية .

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad (1) \quad (a)' = 0$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \quad (2) \quad (x)' = 1$$

$$(ax)' = a \quad (3)$$

$$(f(ax+b))' = af'(ax+b) \quad (12)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (13) \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (5)$$

$$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b) \quad (14)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (15) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (6)$$

$$(f+g)' = f' + g' \quad (7)$$

$$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b) \quad (16)$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \quad (17) \quad (fg)' = f'g + g'f \quad (8)$$

$$(f^n)' = nf'f^{n-1} \quad (18) \quad (af)' = af' \quad (9)$$

$$(\tan(ax+b))' = a(1 + \tan^2(ax+b)) \quad (19)$$

ملاحظة (a) لكن f دالة معرفة على مجال I ولا تحتوي على $\sqrt{\quad}$.
لكي ندرس اشتقاق f في x_0 نتحقق هل f تغير صيغتها في x_0 أم لا ؟
(*) إذا كنت f لا تغير صيغتها في x_0 نقوم بحساب $f'(x)$ ونعوض x بـ x_0

(*) إذا كنت f تغير صيغتها في x_0 ندرس الإشتقاق باستعمال معدل التغير .

(b) إذا كانت f' تنعدم في x_0 ($f'(x_0) = 0$) فإن C_f يقبل مماسا في (T) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ موازيا لمحور الأفاصل .

5 تغيرات دالة

لكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .

(a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$

(b) تكون f تزايدية قطعاً على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

(c) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$

(d) تكون f تناقصية قطعاً على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

I الإشتقاق

1 تعاريف

(a) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونكتب $f'(x_0) = l$.

(b) تكون f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \quad \text{ونكتب } f'_d(x_0) = l$$

(c) تكون f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R} \quad \text{ونكتب } f'_g(x_0) = l$$

(d) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على يمين x_0 وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

(e) (*) (f متصلة في x_0) $\Rightarrow$ (f قابلة للإشتقاق في x_0)
(*) (f غير قابلة للإشتقاق في x_0) $\Rightarrow$ (f غير متصلة في x_0)

2 التاويل الهندسي :

(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f يقبل مماسا في (T) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معمله الموجه $f'(x_0)$ معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الأشكال التالية :

(b) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس في (T_1) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معمله الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الشكلين التاليين :

(c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للإشتقاق على اليسار .

ملاحظة (*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على بين x_0 وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في x_0 إذن C_f لا يقبل مماسا في M لكنه يقبل نصفي مماس غير منطيقين وسيكون C_f على أحد الأشكال :

(*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "لا ينكسر" في M وإذا كانت f غير قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "ينكسر" في M ويكون زاوية . ونقول إن M نقطة مزوات .

3 الدالة التاليفية المماسية لدالة .

(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التاليفية المماسية للدالة f في x_0

(b) وإذا كان a جد قريب من x_0 فإن $u(a)$ قيمة مقربة لـ $f(a)$ ($f(a) \approx u(a)$)

C_f أو إذا كانت $f(x)$ على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$.
(4) محور تماثل - مركز تماثل (a) يكون المستقيم $x = a$: محور تماثل C_f إذا وفقط إذا كان : (*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$ (*) $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x)$ (b) تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل C_f إذا وفقط إذا كان : (*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$ (*) $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = 2b - f(x)$
(III) الدوال الدورية
(1) تعريف (a) نقول إن الدالة f دورية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم T بحيث $(\forall x \in D_f) : f(x + T) = f(x)$ وكل عدد T يحقق هذا الشرط يسمى دور f. (b) إذا كان T دورا للدالة f فإن كل عدد kT دور لـ f ($k \in \mathbb{Z}$) (c) نختار عادة أصغر دور موجب قطعاً . ملاحظة (a) لكي نبين أن f دورية يجب أولاً ملاحظة الدور ثم نتحقق منه (b) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ (*) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ (*) (*) $\sin(x + k\pi) = \sin x$ (*) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ (*) (*) $\tan(x + k\pi) = \tan x$ (*)
(2) ادوار بعض الدوال الاعتيادية . (a) $f(x) = \sin(ax + b)$ أو $f(x) = \cos(ax + b)$ $T = \frac{2\pi}{ a }$ (b) $f(x) = \sin^2(ax + b)$ أو $f(x) = \cos^2(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{ a }$ (c) $f(x) = \tan(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{ a }$ (d) لكي نحدد دور $f + g$ نحدد أدوار كل من f و g و نأخذ أصغر دور مشترك .
(3) رتابة دالة دورية . لتكن f دالة دورية دورها T . إذا كانت f رتيبة على $[a, b]$ فإن f رتيبة على $[a + T, b + T]$ ولها نفس الرتابة .
(4) منحني دالة دورية (a) إذا كانت f دالة دورية دورها T فيكفي إنشاء C_f على مجال سعته T (عادت نأخذ $[0, T] \cap D_f$) ثم إزاحتها بالإزاحة التي متجهتها $T\vec{i}$ ومن أجل إزاحة هذا الجزء نبحث عن النقط المهمة التي تكونه ونزجحها بإضافة T إلى أفصولها والإحتفاظ بالأتوتوب إذا أردنا الإزاحة نحو اليمين ونطرح T من الأفصول إذا أردنا الإزاحة نحو اليسار . (b) إذا كانت f دالة دورية دورها T زوجية (أو فردية) فيكفي إنشاء C_f على $[0, \frac{T}{2}] \cap D_f$ ثم إنشاء السمائل بالنسبة لمحور الأرتيب (أو أصل المعلم) ثم الإزاحة .

(6) مطارف دالة . لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و $x_0 \in I$. يكون للدالة f مطرافاً نسبياً في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0. (II) التمثيل المباني لدالة
(1) التقعر لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I . (a) يكون C_f محدباً () إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \geq 0$ (b) يكون C_f مقعراً () إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \leq 0$
(2) نقط انعطاف (a) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و (T) المماس لـ C_f في $M(x_0, f(x_0))$ نقول إن M نقطة انعطاف إذا كان C_f يغير التقعر في M (بخرق (T)) : (b) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و $x_0 \in I$ تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كان f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0 . ملاحظة إذا كانت f' تنعدم ولا تغير الإشارة في x_0 فإن $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس فيها موازياً لمحور الأفاصيل . (b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرس إشارتها .
(3) الفروع اللانهائية . (a) تعريف نقول إن C_f يقبل فرعاً لانهائياً إذا كانت لدينا إحدى الحالات التالية : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. (b) تصنيف الفروع اللانهائية : (1) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ فإن المستقيم $x = a$: مقارب لـ C_f بجوار a . (2) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ فإن المستقيم $y = a$: مقارب لـ C_f بجوار ∞ . (3) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$: (a) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب بجوار ∞ . (b) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ . (c) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$: (i) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ فإن المستقيم $y = ax + b$: مقارب لـ C_f بجوار ∞ . (ii) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه $y = ax$ بجوار ∞ . ملاحظة يكون المستقيم $y = ax + b$: مقارباً لـ C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $y = ax + b$: مقارباً لـ