الدوران

I) تعريف

الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α هو التطبيق الذي يترك Ω صامدة $(r(\Omega)=\Omega)$ ويربط كل نقطة $M \neq \Omega$ بالنقطة M' بحيث :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

II) خاصيات

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته α $r=r(\Omega,\alpha)$

1) *) $r(\Omega)=\Omega$

*) $(\forall M \in (P)) : r(M)=M \Leftrightarrow M=\Omega$

هذا يعني أن النقطة M هي النقطة الوحيدة الصامدة بالدوران r .

2)

$$(\forall M \in (P)) : r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

3) $r(M)=M'$ تكافئ المثلث $(\Omega M M')$ متساوي الساقين في Ω و $(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \alpha [2\pi]$

4) الدوران يحافظ على المسافة يعني

إذا كان $\begin{cases} r(A)=A' \\ r(B)=B' \end{cases}$ فإن $AB=A'B'$

5) إذا كان $\begin{cases} r(A)=A' \\ r(B)=B' \end{cases}$ فإن $(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv \alpha [2\pi]$

6) الدوران يحافظ على قياس الزوايا الموجهة يعني

إذا كان $\begin{cases} r(A)=A' \ et \ r(B)=B' \\ r(C)=C' \ et \ r(C)=C' \end{cases}$

فإن $(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}) [2\pi]$

7) a) الدوران يحافظ على المرجح يعني :

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G' مرجح $\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$

b) الدوران يحافظ على المنتصف يعني :

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن I' مرجح $[A'B']$

c) الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين يعني :

إذا كان $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$

d) الدوران يحافظ على استقامية 3 نقط يعني :

إذا كانت النقط A و B و C مستقيمية فإن صورها A' و B' و C' مستقيمية .

8) الدوران يحافظ على التعامد والتوازي يعني :

صورة مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان

و صورة مستقيمين متوازيين هما مستقيمان متوازيان .

9) ليكن $r=r(\Omega, \mp\frac{\pi}{2})$.

a) إذا كان $r(M)=M'$ فإن المثلث $(\Omega M M')$ متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω .

b) صورة مستقيم (D) هو مستقيم (D') عمودي عل (D) .

10) ليكن $r=r(\Omega, \mp\frac{\pi}{3})$.

إذا كان $r(M)=M'$ فإن المثلث $(\Omega M M')$ متساوي الأضلاع

11) a) صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$.

b) صورة المستقيم (AB) بالدوران r $(A'B')$.

c) صورة النصف المستقيم $[AB)$ بالدوران r هي النصفالمستقيم $[A'B')$.

d) صورة الدائرة $C(\Omega,R)$ بالدوران r هي الدائرة $C'(\Omega',R)$ مع $\Omega'=r(\Omega)$.

12) a) نعتبر الدوران $r=r(\Omega,\alpha)$ الدوران $r=r(\Omega,-\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران r ونرمز له بـــ r^{-1} .

b) إذا كان $r=r(\Omega,\alpha)$ فإن $r^{-1}=r(\Omega,-\alpha)$ ولدينا :

$r(M)=M' \Leftrightarrow r^{-1}(M')=M$

III) بعض الملاحظات وبعض التقنيات .

1) لكي نحدد قياس الزاوية الموجهة $(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. نحدد قياس الزاوية الهندسية $[B\hat{A}C]$ ليكن α هذا القياس .

*) إذا كان التحرك من $\overrightarrow{AB}$ نحو $\overrightarrow{AC}$ يتم حسب المنحى الموجب فإن $(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \alpha [2\pi]$.

*) إذا كان التحرك حسب المنحى السالب فإن $(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv -\alpha [2\pi]$

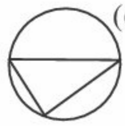
2) لتكن C دائرة مركزها O .

a) إذا كانت $\hat{A}$ و $\hat{B}$ زاويتين محيطيتين وتحصران نفس الوتر وتوجدان من نفس الجهة لهذا الأخير فإن $\hat{A}=\hat{B}$

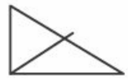
b) إذا كانت $\hat{A}$ و $\hat{B}$ زاويتين محيطيتين وتحصران نفس الوتر وتوجدان من جهتين مختلفتين لهذا الأخير فإن $\hat{A}+\hat{B}=\pi$

c) إذا كانت زاوية محيطية $\hat{A}$ وزاوية مركزية $\hat{O}$ تحصران نفس الوتر وتوجدان من نفس الجهة لهذا الأخير فإن $\hat{O}=2\hat{A}$.

3) إذا كن $|AB|$ قطر في دائرة (C) و M نقطة من (C) فإن المثلث (ABM) قائم الزاوية في M .



4) ليكن (ABC) مثلث قائم الزاوية في A وليكن I منتصف الوتر $|BC|$. لدينا $IA=IB=IC$. I هو مركز الدائرة المحيطة بـــ (ABC) و $|BC|$ قطر لها .



5) a) ليكن r دوران مركزه Ω . إذا كان $r(A)=A'$ فإن $\Omega A=\Omega A'$ وبالتالي Ω ينتمي الى واسط القطعة $|AA'|$.

b) لكي نحدد مركز دوران r ، نبحث عن نقطتين A و B و صورتاهما . إذا كان $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$ فإن مركز r هو تقاطع واسطي $|AA'|$ و $|BB'|$.

6) لكي نحدد زاوية دوران r ، نسميها α ونبحث عن نقطتين A و B و صورتاهما ونستعمل الخاصية (II5) أو نبحث عن المركز Ω ونقطة A وصورتها ونستعمل (II2)

7) لكي نبين أن : $AB=CD$ نبحث عن دوران يحول A و B إلى C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II4) .

8) لكي نحدد $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ نبحث عن دوران يحول A و B إلى C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II5) .

9) لكي نبين أن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\equiv(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'})|2\pi|$ نبحث عن دوران يحول A و B و C و D إلى A' و B' و C' و D' أو العكس ونستعمل الخاصية (II6) .

10) لكي نبين أن $(AB)\perp(CD)$ نبحث عن دوران زاويته $\mp\frac{\pi}{2}$ يحول A و B إلى C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II5) .

11) لكي نبحث عن دوران يحول A إلى B نبحث عن مثلث متساوي الساقين (OAB) تكون قاعدته $|AB|$ ويكون هذا الدوران مركزه O وزاويته $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

12) a) إذا كان (ABC) متساوي الساقين وله زاوية هندسية قياسها $\frac{\pi}{3}$ فإنه متساوي الأضلاع .

b) ليكن $r=r(O,\mp\frac{\pi}{3})$ إذا كان $r(A)=A'$ فإن (OAA') متساوي الأضلاع .

c) لكي نبين أن (IJK) متساوي أضلاع نبحث عن دوران مركزه I ويحول J إلى K مثلا .

13) لكي نبين أن A و B و C مستقيمية نبين أنها صور لنقط مستقيمية أو صورها مستقيمية ونستعمل (II7d) أو نبين أن :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv o\ ou\ \pi|2\pi|$$

14) إذا كانت $M\in(E)\cap(F)$ فإن $r(M)\in r(E)\cap r(F)$

15) ليكن $r=r(\Omega,\alpha)$. إذا أردنا تحديد $r(M)$ نتحقق أولا من تعريف M :

a) إذا كانت M تكون مثلثا متساوي الساقين مع O ونقطة M' نستعمل (II2) ونبين أن $r(M)=M'$.

b) إذا كانت M منتصف قطعة أو مرجح نظمة نضع $r(M)=M'$ ونستعمل (II7a ou b)

c) إذا كانت $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ نضع $r(M)=M'$ ونستعمل (II.7c)

d) إذا كانت $M\in|AB|$ وتحقق شرطا ما نضع $r(M)=M'$ ونبين أن M' تحقق نفس الشرط مع نقطة N ونستنتج أن $r(M)=N$.

e) إذا كانت $M\in(E)\cap(F)$ نستعمل (III.14) .

15) إذا أردنا أن نبين أن J منتصف القطعة $|A'B'|$ نبين أن $r(I)=J$ و I منتصف $|AB|$. ونستعمل (II.7b)