

تحليلية الفضاء

(c) تكون u و v و w مستوائية إذا وفقط إذا كانت إحداها تكتب بدلالة الأخرى مثلا: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
(d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية و $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ فإن $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(II) المعلم في الفضاء

(1) نسمي معلما في الفضاء كل رباعي $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث O نقطة من الفضاء و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3 متجهات غير مستوائية يعني أساس.

(2) ليكن $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما في الفضاء.

(a) لكل نقطة M من الفضاء المتجهة $\vec{OM}$ نكتب بطريقة وحيدة على شكل المتلوث $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. المتلوث (x, y, z) يسمى متلوث

إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم R ونكتب $M(x, y, z)$ أو $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ملاحظة $M(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(b) نعتبر النقطتين $A(x, y, z)$ و $B(x', y', z')$

(*) لدينا $\vec{AB}(x' - x, y' - y, z' - z)$

(*) إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن

$$I\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$$

(III) المستقيم في الفضاء

(1) تعريف

ليكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة. المستقيم المار من A والموجه بـ $\vec{u}$ هو المجموعة التي نرمز لها بـ $D(A, \vec{u})$ والمعرفة بـ

$$D(A, \vec{u}) = \{M \in E \mid \vec{AM} = \alpha\vec{u}\}$$

ملاحظة $M \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمتين

(2) تمثيل باراميتري لمستقيم

تمثيل باراميتري للمستقيم (D) المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه

$$D): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{هو: } \vec{u}(a, b, c)$$

(3) معادلتان ديكرتيتان لمستقيم

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بـ $\vec{u}(a, b, c)$
(*) إذا كانت الأعداد a و b و c غير منعدمة فإن معادلتنا (D) هما:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(*) إذا كان عدد واحد منعدم وعددين غير منعدمين مثلا $a \neq 0, b = 0$ و

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{هما: } (D)$$

(I) الأساس في الفضاء التجهي V_3

(1) ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ 3 متجهات من V_3 و A و B و C و D بنقط بحيث $\vec{AB} = \vec{u}$ و $\vec{AC} = \vec{v}$ و $\vec{AD} = \vec{w}$.

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقطة A و B و C و D مستوائية.

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقطة A و B و C و D غير مستوائية.

(2) ليكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3 متجهات غير مستوائية من V_3 .

(*) كل متجهة من V_3 نكتب بطريقة وحيدة على شكل

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(*) نقول إن المتلوث $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

(*) إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن المتلوث (x, y, z) يسمى متلوث إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ونكتب

$$\vec{u}: (x, y, z) \quad \text{أو} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(3) ليكن $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

(a) نعتبر المتجهتين $\vec{u}: (x, y, z)$ و $\vec{v}: (x', y', z')$

لدينا $\vec{u} + \vec{v}: (x + x', y + y', z + z')$ و $\alpha\vec{u}: (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

(b) نعتبر المتجهتين $\vec{u}: (x, y, z)$ و $\vec{v}: (x', y', z')$

من أجل دراسة استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نقوم بحساب المحددات الثلاثة المستخرجة من جدول إحداثيات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وهي:

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

(*) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين.

(*) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين.

(c) نعتبر المتجهات $\vec{u}: (x, y, z)$ و $\vec{v}: (x', y', z')$ و

$$\vec{w}: (x'', y'', z'')$$

(*) نسمي محدثات المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ العدد الذي نرمز له بالرمز

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad \text{والمعرف بما يلي:}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(*) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

ملاحظة

(a) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين إذا وفقط إذا كان $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ أو $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

(b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين و $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\alpha = \beta = 0$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax + By + Cz + D = 0$ حيث $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

(4) تقاطع مستويين .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستويين يستحسن استعمال معادلتين ديكارتيتين $(P): ax + by + cz + d = 0$ نعتبر المستويين :

$$(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Q) نقوم بحساب المحددات

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

(a) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $(P) \parallel (Q)$.

(b) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D) الذي معادلته الديكارتية هما :

$$(D): \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

(5) تقاطع مستوى ومستقيم .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستوى ومستقيم يستحسن استعمال معادلة ديكارتية بالنسبة للمستوى وتمثيل باراميتري بالنسبة للمستقيم . نعتبر المستوى $(P): \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ والمستقيم

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Δ) نقوم بحل النظام :

$$\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 & (4) \end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة (I) بجهول واحد t .

(a) إذا كان لهذه المعادلة حلا $t = t_0$ فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة (نحصل على إحداثياتها بتعويض t في (1) و (2) و (3)).

(b) إذا كان لهذه المعادلة مالا نهاية له من الحلول $(0 = 0)$ فإن $(\Delta) \subset (P)$.

(c) إذا كانت هذه المعادلة لا تقبل حلا " $(4 = 0)$ مثلا " فإن (Δ) و (P) متوازيان قطعاً.

ملاحظة

(*) $D(A, \vec{u}) \parallel D(B, \vec{v})$ تكفي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين

(*) $D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w})$ تكفي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائيات

(*) $P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel P(B, \vec{x}, \vec{y})$ تكفي $\vec{u}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائيات

و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائيات.

(*) إذا كان عددين منعدمين وعدد واحد غير منعدمين مثلاً $a = 0$ ، $b = 0$

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \text{ و } c \neq 0 \text{ فإن معادلتنا } (D) \text{ هما :}$$

(4) الأوضاع النسبية لمستقيمين .

ملاحظة من أجل دراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين يستحسن استعمال تمثيلين باراميتريين . نعتبر المستقيمين

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ و } (\Delta'): \begin{cases} x = x_1 + a't' \\ y = y_1 + b't' \\ z = z_1 + c't' \end{cases}$$

لدينا (Δ) مار من $A(x_0, y_0, z_0)$ وموجه ب $\vec{u}(a, b, c)$

و (Δ') مار من $B(x_1, y_1, z_1)$ وموجه ب $\vec{u}'(a', b', c')$

من أجل دراسة تقاطع (Δ) و (Δ') نفو بدراسة استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$

(a) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين فإن $(\Delta) \parallel (\Delta')$. ولعرفة هل (Δ) و (Δ') منطبقان أم متوازيان قطعاً . نتحقق هل $A \in (\Delta')$ ؟

(*) إذا كان $A \in (\Delta')$ فإن $(\Delta) = (\Delta')$.

(*) إذا كان $A \notin (\Delta')$ فإن (Δ) و (Δ') متوازيان قطعاً .

(b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان أو غير مستوائيين ، ولعرفة أي حالة لدينا نقوم بحل النظام :

$$(S) \begin{cases} x_0 + at = x_1 + a't' \\ y_0 + bt = y_1 + b't' \\ z_0 + ct = z_1 + c't' \end{cases}$$

في الثالثة .

(i) إذا كان للنظمة (S) حلا فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان وللحصول على إحداثيات نقطة التقاطع نعوض t في تمثيل (Δ) أو t' في تمثيل (Δ') .

(ii) إذا كانت للنظمة (S) لا تقبل حلا فإن (Δ) و (Δ') غير مستوائيين.

(IV) المستوى في الفضاء

(1) تعريف

لنكن A نقطة و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين . المستوى المار من A والموجه ب $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ والمعرفة ب

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}\}$$



ملاحظة $(AM, \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستوائيات}) \Leftrightarrow M \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$

(2) تمثيل باراميتري لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بالمتجهتين

$\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$ تمثيل باراميتري للمستوى (P) هو :

$$(P): \begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases} \quad (t, t' \in \mathbb{R})$$

(3) معادلة ديكارتية لمستوى .

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بالمتجهتين

$\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$

للحصول على معادلة ديكارتية لـ (P) نتبع ما يلي :