

الثانية اقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني 2017

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. أ- أحسب u_1 و u_2 0,5

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > \frac{1}{2}$ 0,75

ج- تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} - u_n \right)$ 0,5

د- استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية وأنها متقاربة 0,5

2. نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \frac{1}{2}$

أ- بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها 0,25

ب- أحسب حدها الأول v_0 0,25

ج- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{1}{2} \left(11 \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1 \right)$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,75

د- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0,25

3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

بين أن $S_n = \frac{55}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) + \frac{n}{2}$ 0,75

التمرين الثاني : (4 ن)

يحتوي كيس على تسع كرات غير قابلة للتمييز باللمس تحمل على التوالي الأعداد : 2;2;2;1;1;1;0;0
نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .

1. بين أن عدد حالات السحب الممكنة هو 36 0,75

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان

أ- بين أن $p(X = 0) = \frac{12}{36}$ 0,75

2

ب- انقل الجدول جانبه على ورقة التحرير ثم أتمم ملأه معطلا جوابك .

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$			$\frac{12}{36}$		

0,5

ج- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (8,5 ن)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 2 - \frac{2}{x} + \ln x$	
1. أحسب $g'(x)$ و استنتج أن g تزايدية على $]0, +\infty[$	1,5
2. أ- أحسب $g(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g (حساب النهايتين عند 0 و $+\infty$ غير مطلوب)	1,25
ب- استنتج إشارة الدالة g على كل من المجالين $]0,1[$ و $[1, +\infty[$	1

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + (x - 2)\ln x$	
1. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	0,75
2. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	0,75
3. أ- بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$	0,75
ب- أحسب $f(1)$ و $f(2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0, +\infty[$	1,5
ج- باستعمال جدول التغيرات حدد صورة المجال $\left[\frac{1}{e}, 2\right]$ بالدالة f	1

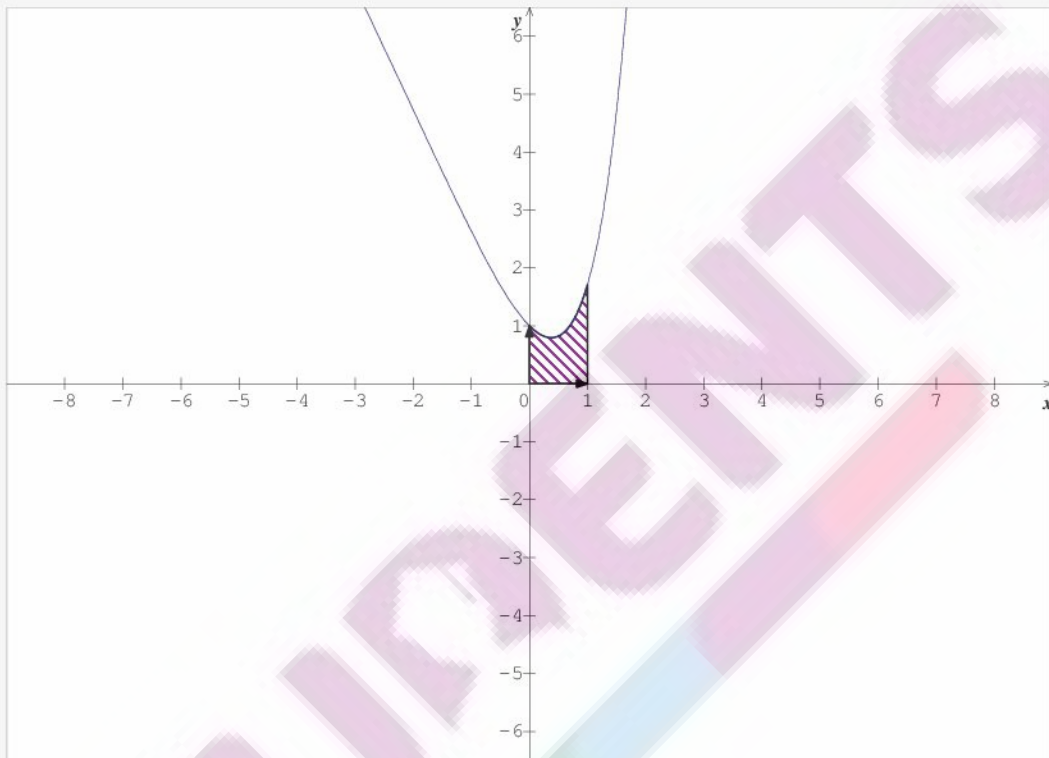
التمرين الرابع : (3 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$	
نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = xe^x - 2x + 1$	
1. باستعمال مكملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^1 xe^x dx = 1$	1,5

2. في الشكل أسفله (C_h) هو التمثيل المبياني للدالة h في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1,5

أحسب مساحة الحيز المكدش



تصحيح التمرين الأول

$$1. \quad u_1 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(6) + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$u_2 = \frac{1}{5}u_1 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{5}\right) + \frac{2}{5} = \frac{8}{25} + \frac{10}{25} = \frac{18}{25}$$

ب-

1. من أجل $n = 0$

لدينا : $u_0 = 6$

إذن : $u_0 > \frac{1}{2}$

2. ليكن $n \in \mathbb{N}$

• نفترض أن : $u_n > \frac{1}{2}$

• و نبين أن : $u_{n+1} > \frac{1}{2}$ ؟

لدينا حسب الافتراض $u_n > \frac{1}{2}$

إذن $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{10}$

إذن $\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} > \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$

إذن : $u_{n+1} > \frac{1}{2}$

3. نستنتج أن : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > \frac{1}{2}$

ج- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{2}{5} = \frac{-4}{5}u_n + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$$

$$\text{إذن : لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$$

د-

4. ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_n > \frac{1}{2}$

إذن : $\frac{1}{2} - u_n < 0$

إذن : $\frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} - u_n \right) < 0$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية

5. بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية و مصغرة (بالعدد $\frac{1}{2}$) فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

2. أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \left(u_n - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5}v_n$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

و منه المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

ب- $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

ج-

6. ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_n = v_0 q^n$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n = \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^n$

7. لدينا : $v_n = u_n - \frac{1}{2}$

إذن $u_n = v_n + \frac{1}{2}$

إذن : $u_n = \frac{11}{2} \left(\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{2}$

و منه $u_n = \frac{1}{2} \left(11 \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1 \right)$ لكل n من $\mathbb{N}$

د- لدينا : $-1 < \frac{1}{5} < 1$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(11 \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 \right) = \frac{1}{2}$

وبتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

3. لنحسب : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

لدينا : $u_n = v_n + \frac{1}{2}$

إذن $S_n = v_0 + \frac{1}{2} + v_1 + \frac{1}{2} + v_2 + \frac{1}{2} + \dots + v_{n-1} + \frac{1}{2}$

إذن : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{((n-1)-0+1)\text{fois}}$

إذن $S_n = v_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)-0+1}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{((n-1)-0+1)\text{fois}}$

إذن : $S_n = \frac{11}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{(n)\text{fois}}$

ومنه : $S_n = \frac{55}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) + \frac{n}{2}$

تصحيح التمرين الثاني

1. التجربة " سحب كرتين في آن واحد من الكيس "
 ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

$$\text{card } \Omega = C_9^2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36 \quad (\text{عدد حالات السحب الممكنة})$$

2. المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان

$$X = 2 \rightarrow \begin{cases} \boxed{0} \boxed{2} \\ \boxed{1} \boxed{1} \end{cases} \text{ أي}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_4^2}{36} = \frac{2 \times 3 + 6}{36} = \frac{12}{36}$$

ب-

$$X = 0 \rightarrow \boxed{0} \boxed{0} \quad .8$$

$$p(X = 0) = \frac{C_2^2}{36} = \frac{1}{36}$$

$$X = 1 \rightarrow \boxed{0} \boxed{1} \quad .9$$

$$p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{36} = \frac{2 \times 4}{36} = \frac{8}{36}$$

$$p(X = 2) = \frac{12}{36} \quad .10 \text{ (حسب نتيجة السؤال 2) أ-}$$

$$X = 3 \rightarrow \boxed{1} \boxed{2} \quad .11$$

$$p(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{36} = \frac{4 \times 3}{36} = \frac{12}{36}$$

$$X = 4 \rightarrow \boxed{2} \boxed{2} \quad .12$$

$$p(X = 4) = \frac{C_3^2}{36} = \frac{3}{36}$$

قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$

- ج- $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \left(0 \times \frac{1}{36}\right) + \left(1 \times \frac{8}{36}\right) + \left(2 \times \frac{12}{36}\right) + \left(3 \times \frac{12}{36}\right) + \left(4 \times \frac{3}{36}\right) = \frac{0+8+24+36+12}{36} = \frac{80}{36} = \frac{20}{9}$$

تصحيح التمرين الثالث

الجزء الأول :
1.13. ليكن $x \in]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \left(2 - \frac{2}{x} + \ln x\right)' = 0 - 2 \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \text{ لدينا :}$$

$$\text{إذن } g'(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

$$14. \text{ لدينا } x > 0 \text{ إذن } \frac{2}{x^2} > 0 \text{ و } \frac{1}{x} > 0 \text{ إذن } \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{إذن } g'(x) > 0 \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

و منه الدالة g تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

2. أ-

$$15. g(1) = 2 - \frac{2}{1} + \ln 1 = 2 - 2 + 0 = 0$$

16. جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		$\nearrow$

ب-

✓ على المجال $]0, 1]$: لدينا $0 < x \leq 1$ و الدالة g تزايدية

$$\text{إذن : } g(x) \leq g(1)$$

$$\text{و منه : } g(x) \leq 0$$

✓ على المجال $[1, +\infty[$: لدينا $x \geq 1$ و الدالة g تزايدية

$$\text{إذن : } g(x) \geq g(1)$$

$$\text{و منه : } g(x) \geq 0$$

الجزء الثاني :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - 1 + (x - 2) \ln x = +\infty \quad 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - 1 = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - 2 = -2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + (x - 2) \ln x = +\infty \quad 2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

3. أ- ليكن $x \in]0, +\infty[$:
لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (x - 2)' \ln x + (x - 2) \cdot \ln'(x) \\ &= 1 + \ln x + \frac{x - 2}{x} \\ &= 1 + \ln x + 1 - \frac{2}{x} \\ &= \ln x + 2 - \frac{2}{x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = g(x) :]0, +\infty[\text{ لكل } x \text{ من}$$

ب-

$$f(1) = 1 - 1 + (1 - 2) \ln 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$f(2) = 2 - 1 + (2 - 2) \ln 2 = 1 \quad \checkmark$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 + \left(\frac{1}{e} - 2\right) \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 - \frac{1}{e} + 2 = 1 \quad \checkmark$$

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, 2\right]\right) = [0, 1] \quad \checkmark$$

(على المجال $\left[\frac{1}{e}, 2\right]$: القيمة العنوية للدالة f هي 0 و القيمة القصوية للدالة f هي 1 و f متصلة على $\left[\frac{1}{e}, 2\right]$)

تصحيح التمرين الرابع

1.

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases} \quad \downarrow$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x dx &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= (e - 0) - (e - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 h(x) dx \cdot (UA) \\ &= \int_0^1 (x e^x - 2x + 1) dx \cdot (UA) \\ &= \left(\int_0^1 x e^x dx \right) + \left(\int_0^1 (-2x + 1) dx \right) \cdot (UA) \\ &= \left(1 + [-x^2 + x]_0^1 \right) \cdot (UA) \\ &= 1 \cdot (UA) \end{aligned}$$

つづく