الثانية إقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني الاستدراكي 2017

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بما يلي :** $u_0 = 2$ **و** $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$	
1. أ- أحسب u_1 **و** u_2	0,5
1. ب- تحقق من أن $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{2u_n+3}$ **ثم بين بالترجع أن لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n > 1$	0,75
1. ج- بين أن لكل n **من** $\mathbb{N}$**:** $u_{n+1} - u_n = 2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$	0,5
1. د- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية و أنها متقاربة**	0,5
2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بما يلي :** $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n+1}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$	
2. أ- تحقق أن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_n \neq 1$	0,25
2. ب- أحسب v_0	0,25
2. ج- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **هندسية أساسها** $\dfrac{1}{5}$	0,5
2. د- أحسب v_n **بدلالة** n	0,25
3.أ- بين أن $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$	0,25
3. ب- استنتج أن : $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$	0,5
3. ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0,25

التمرين الثاني : (4 ن)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأعداد 0، 1، 2 و كرتين لونهما أسود **تحملان العددين** 1، 2 ، كلها غير قابلة للتمييز باللمس .
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق .

1. نعتبر الحدثين A و B التاليين :
A " الكرتان المسحوبتان تحملان العدد 1 "
B " سحب كرة بيضاء في المرة الأولى "

0,5	**1. أ- بين أن** $p(A)=\dfrac{1}{10}$
1	**1. ب- أحسب احتمال الحدث** B **و بين أن** $p(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$
0,5	**1. ج- هل الحدثان** A **و** B **مستقلان ؟ علل جوابك .**
	2. ليكن X **المتغير العشوائي الذي يساوي جداء العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان .**
1,5	**2. أ- أنقل الجدول جانبه إلى ورقة تحريرك ثم أتمم ملأه معللا جوابك**
0,5	**2. ب- أحسب** $E(X)$ **الأمل الرياضي للمتغير العشوائي** X

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$				

التمرين الثالث : (1,5 ن)

نضع : $I=\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+1}dx$ و $J=\int_0^1 \dfrac{x^3}{x^2+1}dx$

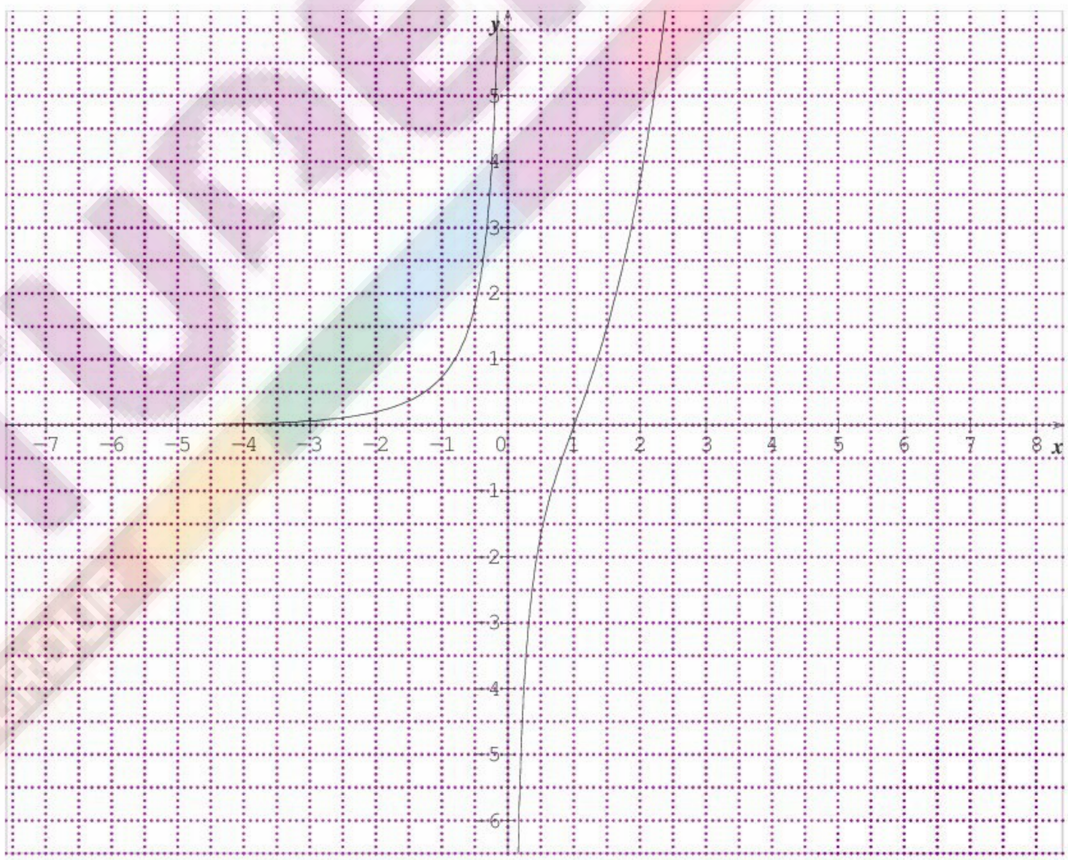
0,5	**1. أحسب** I
0,5	**2. أحسب** $I+J$
0,5	**3. استنتج أن** $J=\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$

التمرين الرابع : (10 ن)

نعتبر الدالة العددية f **للمتغير الحقيقي** x **المعرفة على** $\mathbb{R}^*$ **بما يلي :** $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)e^x$ **و ليكن** (C_f) **تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم** $(O,\vec{i},\vec{j})$

1,75	**1. أ- أحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و بين أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ **ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .**

1. ب- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .	0,75
1. ج- بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$ و أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .	1,75
2. أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)}{x^2} e^x$	1
2. ب- بين أن $f'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}^*$	1
2. ج- استنتج منحى تغيرات الدالة f على $]-\infty, 0[$ ثم على $]0, +\infty[$	0,5
2. د- أحسب $f(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f	1,25
3. في الشكل أسفله (C_f) هو التمثيل المبياني للدالة f	
3. أ- اعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 1	1
3. ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$	0,5
3. ج- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x) = -2$	0,5



تصحيح التمرين الأول

1. أ- $u_1 = \frac{3u_0+2}{2u_0+3} = \frac{3(2)+2}{2(2)+3} = \frac{8}{7}$

$$u_2 = \frac{3u_1+2}{2u_1+3} = \frac{3\left(\frac{8}{7}\right)+2}{2\left(\frac{8}{7}\right)+3} = \frac{\frac{38}{7}}{\frac{37}{7}} = \frac{38}{37}$$

1. ب-

✓ **ليكن** $n \in \mathbb{N}$

لدينا : $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n+2}{2u_n+3} - 1 = \frac{3u_n+2-2u_n-3}{2u_n+3} = \frac{u_n-1}{2u_n+3}$

إذن : $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n-1}{2u_n+3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

✓

- **من أجل** $n=0$:
  لدينا $u_0 = 2$
  إذن : $u_0 > 1$
- **ليكن** $n \in \mathbb{N}$
  نفترض أن $u_n > 1$
  و نبين أن $u_{n+1} > 1$ ؟
  لدينا : $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n-1}{2u_n+3}$
  و حسب الافتراض $u_n > 1$ **إذن** $u_n - 1 > 0$ **و** $2u_n+3>0$
  إذن $\frac{u_n-1}{2u_n+3} > 0$ **إذن** $u_{n+1} - 1 > 0$
  و منه $u_{n+1} > 1$
- **نستنتج أن :** $u_n > 1$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

1. ج- ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{2u_n+3}-u_n=\frac{3u_n+2-2u_n^2-3u_n}{2u_n+3}=\frac{2(1-u_n^2)}{2u_n+3}=2\left(\frac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=2\left(\frac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$

1. د-

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

لدينا : $u_n>1$ إذن : $1-u_n^2<0$ و $2u_n+3>0$

إذن $2\left(\frac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)<0$

و منه لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n<0$

و بالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية

✓ بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

2. أ- نفترض أنه يوجد n من $\mathbb{N}$ بحيث : $v_n=1$

إذن : $\frac{u_n-1}{u_n+1}=1$

إذن : $u_n-1=u_n+1$

إذن $-1=1$

و هذا غير ممكن

و بالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n\neq 1$

2. ب- $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$

2. ج – ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا : $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{3u_n+2}{2u_n+3}-1}{\frac{3u_n+2}{2u_n+3}+1}=\frac{\frac{u_n-1}{2u_n+3}}{\frac{5u_n+5}{2u_n+3}}=\frac{u_n-1}{5(u_n+1)}=\frac{1}{5}v_n$$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$

و منه : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{5}$

2. د- ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا : $v_n=v_0q^n$

إذن : $v_n = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

3. أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n - 1 = (u_n + 1)v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n - 1 = u_n v_n + v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n - u_n v_n = 1 + v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n (1 - v_n) = 1 + v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

إذن : لكل n **من** $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3. ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ **و** $v_n = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$

إذن : لكل n **من** $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

3. ج- بما أن $-1 < \frac{1}{5} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

فإن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق "
ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = A_5^2 = 20$

1. أ- A **" الكرتان المسحوبتان تحملان العدد** 1 **"**

$$cardA = A_2^2 = 2$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

1. ب-

✓ B **" سحب كرة بيضاء في المرة الأولى "**

$$cardB = A_3^1 \times A_4^1 = 3 \times 4 = 12$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\,\Omega} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

✓ $A \cap B$ **" الكرتان المسحوبتان تحملان العدد 1 و الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "**

$$card(A \cap B) = A_1^1 \times A_1^1 = 1$$

$$p(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card\,\Omega} = \frac{1}{20}$$

1. ج- لدينا : $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$ **و** $p(A) \times p(B) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{50}$

بما أن $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ **فإن الحدثين** A **و** B **غير مستقلين .**

2. أ-

$$\begin{cases} 0,\overline{0} \\ \overline{0},0 \end{cases} \rightarrow X = 0$$

$$p(X = 0) = \frac{2\left(A_1^1 \times A_4^1\right)}{20} = \frac{2 \times 1 \times 4}{2} = \frac{2}{5}$$

$$1,1 \rightarrow X = 1$$

$$p(X = 1) = p(A) = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} 1,2 \\ 2,1 \end{cases} \rightarrow X = 2$$

$$p(X=2)=\frac{2\left(A_2^1\times A_2^1\right)}{20}=\frac{2\times2\times2}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

$$2,2 \quad\rightarrow\quad X=4$$

$$p(X=4)=\frac{A_2^2}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

2. ب- الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(0\times\frac{2}{5}\right)+\left(1\times\frac{1}{10}\right)+\left(2\times\frac{2}{5}\right)+\left(4\times\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}+\frac{4}{5}+\frac{4}{10}=\frac{13}{10}$$

تصحيح التمرين الثالث

.1 $I=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(1)=\frac{1}{2}\ln(2)$

.2 $I+J=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^3+x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

.3 لدينا : $I+J=\frac{1}{2}$ **إذن** $J=\frac{1}{2}-I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2)$ **و منه** $J=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$

تصحيح التمرين الرابع

.1 أ-

✓ **لدينا :** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^x=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=1\\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases}$

✓ لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{e^x}{x} = +\infty$

لأن $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$

✓ <u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

1. ب-

✓ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x = 0$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

✓ <u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$

1. ج-

✓ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^x = 1 \end{cases}$

✓ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^x = 1 \end{cases}$

✓ <u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

2. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{x-1}{x}\right)e^x\right)' \\ &= \left(\frac{x-1}{x}\right)' e^x + \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(e^x\right)' \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{x^2} e^x + \frac{x-1}{x} e^x \\ &= \frac{1}{x^2} e^x + \frac{x-1}{x} e^x \\ &= \left(\frac{1+x^2-x}{x^2}\right) e^x \end{aligned}$$

إذن : لكل x **من** $\mathbb{R}^*$ **:** $f'(x) = \dfrac{\left(x^2-x+1\right)}{x^2} e^x$

2. ب- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

لدينا $f'(x) = \dfrac{\left(x^2-x+1\right)}{x^2} e^x$

و لدينا : $e^x > 0$ **و** $x^2 > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ **هي إشارة** x^2-x+1

لدينا : $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1-4 = -3 < 0$ إذن $x^2-x+1 > 0$

و بالتالي : $f'(x) > 0$ **لكل** x **من** $\mathbb{R}^*$

2. ج- على $]-\infty, 0[$ **: بما أن** $f'(x) > 0$ **فإن** f **تزايدية قطعا**

و على $]0, +\infty[$ **: بما أن** $f'(x) > 0$ **فإن** f **تزايدية قطعا**

2. د-

- ✓ **لدينا :** $f(1) = \dfrac{1-1}{1} e^1 = 0$
- ✓ **جدول تغيرات** f **:**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

3. أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 1 :

$$y = f'(1).(x-1) + f(1)$$

لدينا : $f(1) = 0$ و $f'(1) = e$

إذن : $y = e.(x-1) + 0$

إذن : $(T) : \boxed{y = ex - e}$

3. ب- مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ هو عدد نقط تقاطع (C_f) و المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = 2$:
المعادلة تقبل حلين .

3. ج- مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ هو عدد نقط تقاطع (C_f) و المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = -2$:
المعادلة تقبل حلا وحيدا .

つづく