التذبذبات الحرة في دارة RLCمتوالية

I) التذبذبات الحرة في دارة RLCعلى التوالي:

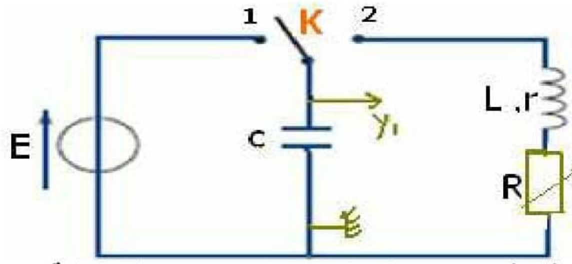
1) تعريف:

الدارةRLCعلى التوالي هي دارة تتكون من موصل أومي مقاومته R ومكثف سعته C ووشيعة مقاومتها r ومعامل تحريضهاL.

تكون التذبذبات حرة في دارةRLC عندما لا يتوفر فيها أي مصدر للطاقة ماعدا الطاقة المخزونة في المكثف المشحون بدئيا : حيث يتفرغ المكثف في الوشيعة. (أي أن الدارة الحرةRLC لا تشتمل على أي مولد للتيار الكهربائي).

2) تفريغ مكثف في وشيعة:

ننجز التركيب التالي:



نضع قاطع التيار في الموضع1 لمدة زمنية كافية لشحن المكثف ثم نؤرجحه إلى الموضع2 ، ونعاين على شاشة راسم التذبذب التوتر بين مربطي المكثف.

نعيد التجربة عدة مرات بتغيير قيمة المقاومة R فنحصل على أنظمة الخمود.

3) أنظمة الخمود:

عند وضع قاطع التيار في الموضع 2 ، شحنة المكثف تتذبذب بين لبوسيه ، ونظرا لوجود المقاومة في الدارة ، تتناقص الشحنة وبالتالي يتناقص التوتر المطبق بين مربطي المكثف ، نقول أن التذبذبات مخمدة . وبما أن الدارة لاتشتمل على أي مولد ، فإن التذبذبات حرة ومخمدة.(خلال التذبذب جزء من الطاقة يتبدد على مستوى الموصل الأومي على شكل طاقة حرارية بمفعول جول).

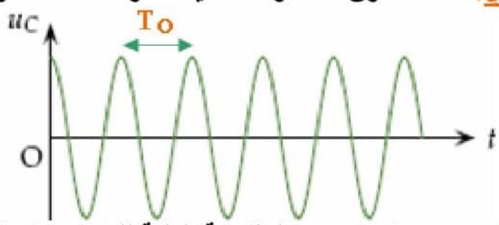
وحسب قيمة مقاومة الدارة نميز ثلاث أنظمة:

***نظام دوري:** عندما تكون المقاومة الكلية للدارة منعدمة،تكون التذبذبات حرة وغير مخمدة. (في هذه الحالة تنحفظ الطاقة الكلية للدارة).**

وهذه حالة يصعب تحقيقها تجريبيا ،

لأنه كيفما كانت الوشيعة فإن مقاومتها غير مهملة

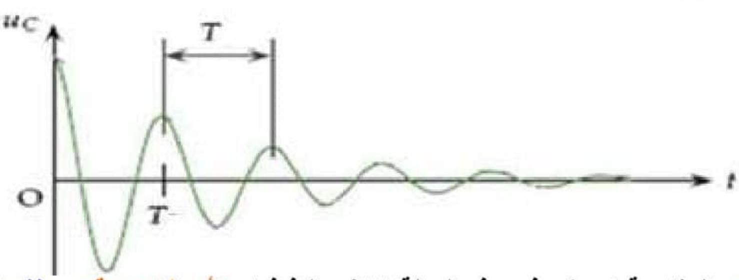
تتميز بالدور الخاص : T_0



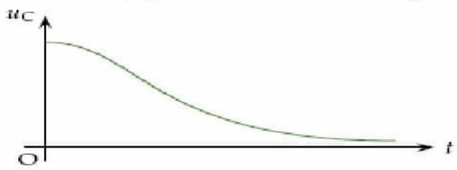
***نظام شبه دوري:** عندما تكون المقاومة الكلية للدارة صغيرة، التذبذبات حرة و مخمدة،ففي هذه الحالة يتناقص وسعها إلى أن ينعدم.(وهي حالةالخمود الضعيف).**

وشبه الدور : T

$T \approx T_0$

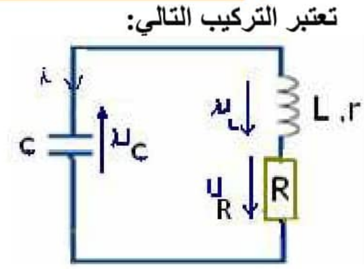


***نظام لادوري:** المقاومة كبيرة ، في هذه الحالة تختفي التذبذبات لأن الخمود قوي.يفقد المكثف شحنته لكن بعد مدة زمنية طويلة دون تذبذب.**



4) المعادلة التفاضلية لدارة RLC.

تعتبر التركيب التالي:



حسب قانون إضافية التوترات: $u_C + u_R + u_L = 0$

$u_R = Ri$ مع $i = \frac{dq}{dt} = c\frac{du_c}{dt} \Leftarrow$ $u_R = Rc\frac{du_c}{dt}$

و $u_L = ri + L\frac{di}{dt}$

إذن: $u_c + (R+r)c\frac{du_c}{dt} + Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$ $\Leftarrow Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} + R_t c\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$

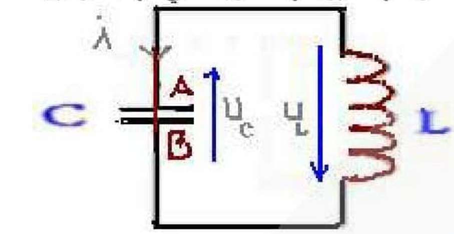
ونحصل على المعادلة التفاضلية لدارة متواليةRLC : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R_t}{L}.\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}.u_c = 0$

المقدار : $\frac{R_t}{L}.\frac{du_c}{dt}$ ناتج عن ظاهرة الخمود(بانعدامه يزول الخمود).

II)التذبذبات غير المخمدة في دارة مثالية LC.

1) دراسة الدارة المثالية LC

أ) التركيب : تعتبر التركيب التالي المكون من مكثف مشحون سعته C ، ووشيعة معامل تحريضها الذاتي **L** ومقاومتها منعدمة.هذه دارة مثالية لأنه كيفما كانت الوشيعة فإن مقاومتها غير مهملة وبالتالي فهذا تركيب مثالي يصعب تحقيقه تجريبيا.



ب)المعادلة التفاضلية:

حسب قانون إضافية التوترات نجد: $u_L + u_c = 0$ **(1)**

مع: $u_L = L\frac{di}{dt}$ و $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(cu_c)}{dt} = c\frac{du_c}{dt}$ $\Leftarrow$ $\frac{di}{dt} = c\frac{d^2u_c}{dt^2}$ إذن: $u_L = Lc.\frac{d^2u_c}{dt^2}$ 0

وبذلك العلاقة (1) تصبح: (2) $Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0$ وهي المعادلة التفاضلية التي يتحققهاالتوتر بين مربطي المكثف في دارة مثالية LC.

ويمكن كتابتها كما يلي : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{Lc}u_c = 0$

ملحوظة: بتعويض u_c ب: $\frac{q}{c}$ العلاقة (1) $u_L + u_c = 0$ تصبح : $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0$ أي: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{Lc}.q = 0$

وهي المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة الكهربائية q في دارة مثالية Lc.

ج) حل المعادلة التفاضلية:

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{Lc}u_c = 0$ هوعبارة عن دالة جيبيه يكتب كما يلي:

$u_c(t) = U_m\cos(\omega_o t + \varphi)$ مع : $\omega_o = \frac{2\pi}{T_O}$ النبض الخاص.

ω_O النبض الخاص للدارة المتذبذبة LC ، وحدته rad/s.

U_m: وسع التذبذبات وهي القيمة القصوية للتوتر اللحظي $u_c(t)$.

$\frac{2\pi}{T}t + \varphi$: طور التوتر عند اللحظة ذات التاريخ t.

φ : الطور عند أصل التواريخ.(بالراديان rad).

T_O:الدور الخاص للتذبذبات.

الثابتتين U_m و φ تحددان باستعمال الشروط البدئية للتوتر u_c وشدة التيار الكهربائي i.

2) تحديد تعبير الدور الخاص:

لدينا : $u_c(t)=U_m\cos(\omega_o t+\varphi)$

إذن: $\frac{du_c}{dt}=-U_m\omega_o\sin(\omega_o t+\varphi) \Leftarrow \frac{d^2u_c}{dt^2}=-U_m\,\omega_o^2\,\cos(\omega_o t+\varphi)$

$\frac{d^2u_c}{dt^2}=-\omega_o^2\cdot u_{c(t)}$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية $\frac{d^2u_c}{dt^2}$ بتعبيرها فنجد :

$-\omega_o^2u_c+\frac{1}{Lc}u_c=0$ ومنه: $\omega_o^2=\frac{1}{Lc}$ النبض الخاص $\omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

ولدينا : $T_0=\frac{2\pi}{\omega_o}$ إذن : $T_O=2\pi\sqrt{LC}$

<u>لنستعمل معادلة الأبعاد لكي نتأكد من كون وحدة الدورفي العلاقة السابقة هي الثانية.</u>

$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(cu_c)}{dt}=c\frac{du_c}{dt} \Leftarrow c=\frac{i}{\frac{du_c}{dt}} \Leftarrow [c]=[i][u]^{-1}[t]$

ولدينا : $u_L=L\frac{di}{dt} \Leftarrow L=\frac{u_L}{\frac{di}{dt}} \Leftarrow [L]=[u][i]^{-1}[t]$

$\Leftarrow [L][c]=\frac{[u][t]}{[i]}\times\frac{[i][t]}{[u]}=[t]^2$

إذن وحدة T_O هي: وحدة الزمن ، أي الثانية.

أو بطريقة أخرى: من خلال تعريف ثابتة الزمن.

نعلم أن الجداء $R.c$ والنسبة $\frac{L}{R}$ لهما بعد الزمن. $\Leftarrow [RC]=[T]$ و $\left[\frac{L}{C}\right]=[T] \Leftarrow [LC]=\left[\frac{L}{R}\right]\times[RC]=[T]^2$

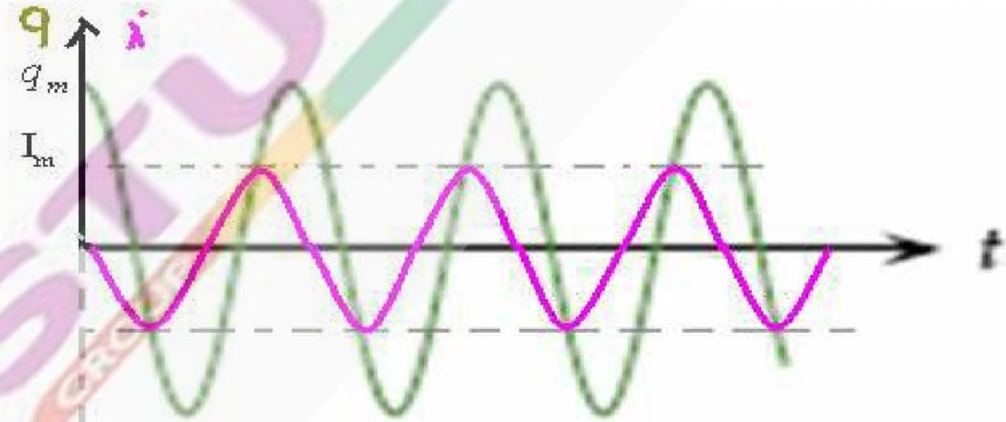
3) تعبير الشحنة q وشدة التيار $i(t)$.

* شحنة المكثف: $q(t)=c\times u(t)=c.U_m\cos(\omega_O.t+\varphi)=q_m\cos(\omega_O.t+\varphi)$ مع: $q_m=c.U_m$

* شدة التيار الكهربائي: $i(t)=\frac{dq}{dt}=-q_m.\omega_o\sin(\omega_o t+\varphi)=-I_m\sin(\omega_o t+\varphi)=I_m.\cos(\omega_o t+\varphi+\frac{\pi}{2})$ مع: $I_m=q_m\omega_O$

في حالة : $\varphi=0$: $q(t)=q_m\cos\frac{2\pi}{T_o}t$ و $i(t)=I_m.\cos(\frac{2\pi}{T_o}t+\frac{\pi}{2})$

ومنه يتضح أن الدالتين $u(t)$ و $q(t)$ على تربيع في الطور عندما تكون إحداهما قصوية أو دنوية تكون الأخرى منعدمة .



III)انتقال الطاقة بين المكثف والوشيعة:

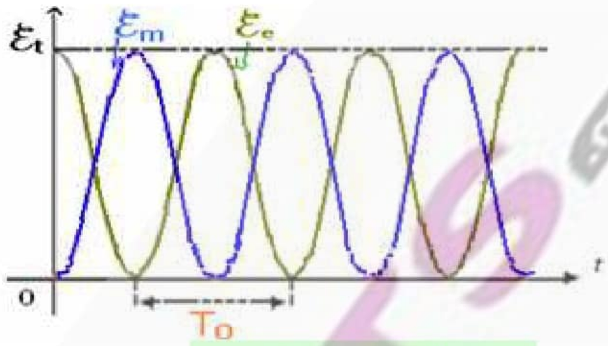
1) طاقة الدارة المثالية LC .

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة المثالية LC تساوي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية المخزونة في المكثف ξ_e والطاقة المغناطيسية ξ_m المخزونة في الوشيعة .

$$\xi_t=\xi_e+\xi_m=\frac{1}{2}c.u_c^{\ 2}+\frac{1}{2}Li^2$$

يمثل الشكل التالي تغيرات ξ_m و ξ_e و ξ_t بدلالة الزمن.

$\mathcal{E}_t = c^{te}$

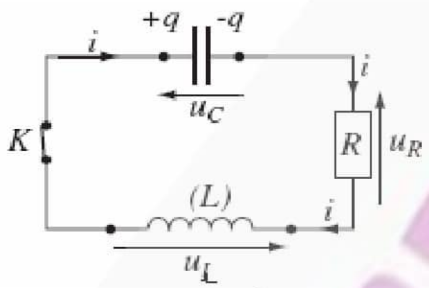


الطاقة الكلية لدارة مثالية**LC** : $\xi_t = \frac{1}{2}cU_m{}^2 = \frac{1}{2}Li_m{}^2$

<u>استنتاج</u>: خلال التذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في الوشيعة والعكس.

2) <u>طاقة الدارة المتوالية</u> RLC .

يمكن التعبير عن طاقة الدارةالمتوالية RLC **في لحظة معينة كما يلي :** $\xi_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} + \frac{1}{2}Li^2$



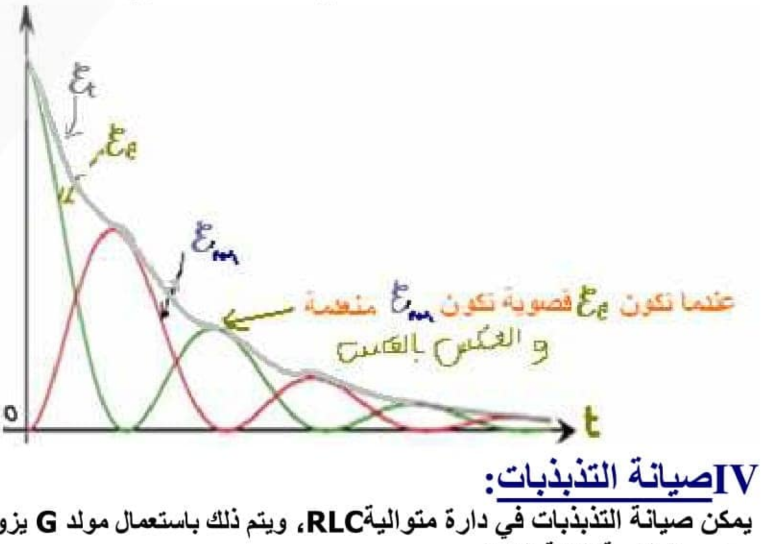
لدينا حسب قانون إضافية التوترات: $u_L + u_R + u_c = 0$

أي: $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = 0 \Leftarrow$ (1) $L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = -R.i$

من خلال تعبير الطاقة الكلية للدارة: $\xi_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c} + \frac{1}{2}Li^2$

إذن: $\frac{d\xi_t}{dt} = \frac{q}{c}.\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = i.\left[\frac{q}{c} + L\frac{di}{dt}\right]$

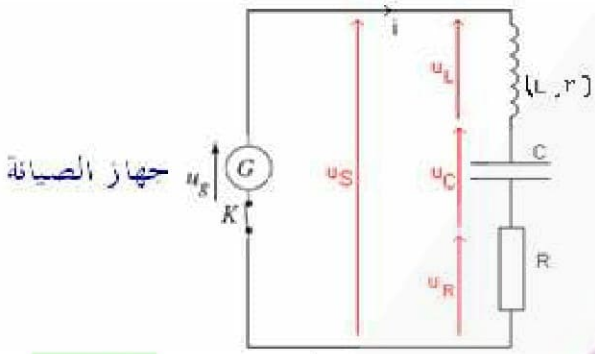
باعتبار العلاقة (1) $\frac{d\xi_t}{dt} = -R.i^2 \Leftarrow \frac{d\xi_t}{dt} < 0$ **إذن الطاقة الكلية للدارة تناقصية ويعزى ذلك إلى وجود المقاومة.**



تتناقص الطاقة الكلية للدارة تدريجيا **بسبب مفعول جول.**

IV<u>صيانة التذبذبات:</u>

يمكن صيانة التذبذبات في دارة متوالية RLC، ويتم ذلك باستعمال مولد G يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبذذة بمفعول جول على مستوى المقاومة الكلية للدارة.



المولدG **يزود** الدارة **بتوتر يتناسب اطرادا مع** شدة التيار الكهربائي **الذي يعبر الدارة.** $u_g = R_o.i$ **(مع** $R_o = R + r$ **)**

وهو يتصرف كمقاومة سالبة.

بتطبيق قانون إضافية التوترات : $u_g = u_R + u_c + u_L$

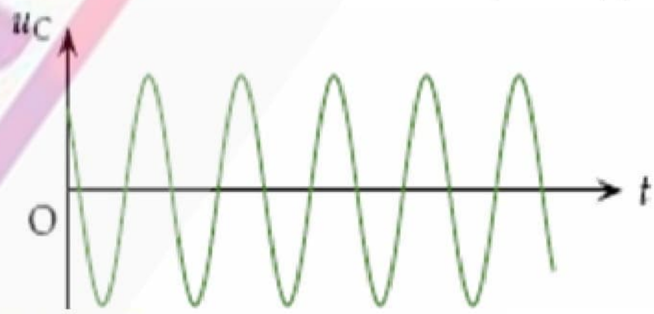
أي: $(R+r)i = R.i + u_c + r.i + L\dfrac{di}{dt}$ $\Leftarrow$ $L\dfrac{di}{dt} + u_c = 0$ **(1)**

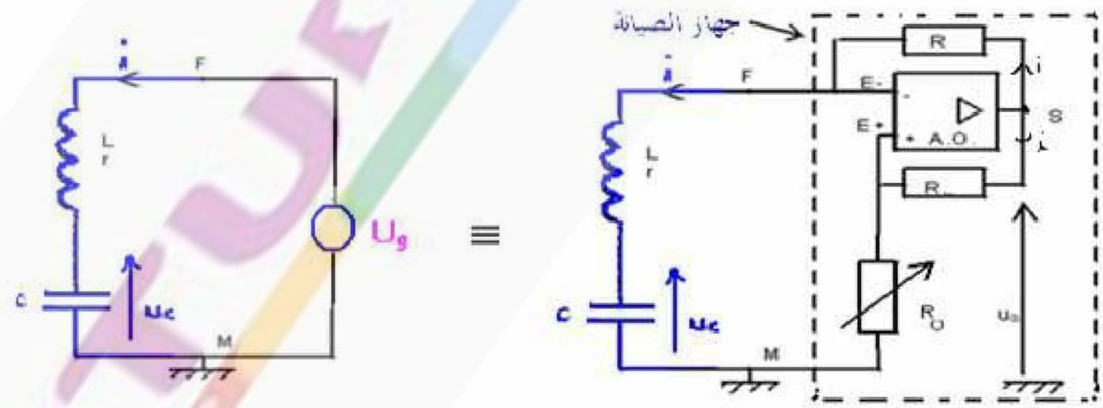
وبما أن: $i = \dfrac{dq}{dt} = c\dfrac{du_c}{dt}$ **فإن:** $\dfrac{di}{dt} = c\dfrac{d^2u_c}{dt^2}$

إذن (1) تصبح: $Lc\dfrac{du_c}{dt} + u_c = 0$ **وهي المعادلة التفاضلية** المميزة للدارة **المثالية ذات المقاومة المهملة ، وبذلك تصبح التذبذبات مصانة.**

دورها : $T = T_0$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$





لا تنسونا بأدعيتكم الصالحة

والله ولي التوفيق.