الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية **2014**

الموضوع

NS 24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

www.students.ma

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل .....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

www.students.ma

التمرين الأول:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = \underbrace{333.....31}_{n \text{ مرة}}$ (n مرة الرقم 3)

0.5 1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.

0.5 2- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7 \ [31]$

0.75 4- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0 \ [31]$ ؛ ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

0.5 5- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ،إذا كان $n \equiv 1 \ [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثاني:(3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{Z}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من $\mathbb{Z}$ ، نضع: $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \left\{ M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

0.5 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{Z}),+)$.

0.75 2- احسب $J^2 = J \times J$ حيث: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{Z}),\times)$

3- نعرف على $M_2(\mathbb{Z})$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من $\mathbb{Z}^*$ نحو $M_2(\mathbb{Z})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (a و b عددان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a,b)$.

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{Z}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{Z}),*)$

0.25 ب) نضع: $E^* = E - \{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{Z}^*) = E^*$

0.5 ج) بين أن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية.

0.5 4- بين أن: $(\forall (A,B,C) \in E^3) \quad A*(B+C) = A*B + A*C$

0.5 5- استنتج مما سبق أن $(E,+,*)$ جسم تبادلي.

www.students.ma

التمرين الثالث:(3.5 نقط)

www.students.ma

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $q\in\left]0,\frac{p}{2}\right[\cup\left]\frac{p}{2},p\right[$

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E)\quad z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

0.25 أ)تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{iq}\right)^2$

0.75 ب) اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$.

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحاقها على التوالي 1 و 1 - و $e^{i\left(q+\frac{p}{4}\right)}$ و $e^{i\left(q-\frac{p}{4}\right)}$ و $\sqrt{2}e^{iq}$

0.5 أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان .

0.25 ب)ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية.

0.25 ج)استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$.

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{p}{2}$

0.25 أ)اعط الصيغة العقدية للدوران r.

0.5 ب)تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b=\sqrt{2}e^{iq}+i$

0.25 ج)بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان .

0.25 4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $\left(-\vec{v}\right)$

0.25 5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$.

التمرين الرابع: (8 نقط)

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \; ; \; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

0.5 1- أ)بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.25 ب)أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,+\infty[$

0.25 2- أ)بين أن: $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

0.25 ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

www.students.ma

ج) بين أن: $\left(\exists \alpha \in]0,1[\right) \quad f'(\alpha)=0$ — 0.5

د) استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ — 0.5

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

1- أ) تحقق أن: $\left(\forall t \in [1,+\infty[\right) \quad \frac{1}{2} \le \frac{t^2}{1+t^2} \le 1$ — 0.5

ب) بين أن: $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right) \quad F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x) \le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$ — 1

(لاحظ أن: $F(x)=\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t}dt$)

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. — 1

2- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ — 0.5

ب) أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$ — 0.25

III - 1- أ) بين أن : $\left(\forall t \in]0,+\infty[\right) \quad -t\ln t \le \frac{1}{e}$ — 0.5

ب) بين أن : $\left(\forall t \in [0,+\infty[\right) \quad f(t) \le \frac{1}{e}$ — 0.25

ج) استنتج أن: $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right) \quad F(x) < x$ — 0.25

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 \in]0,1[$ و $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad u_{n+1}=F(u_n)$

أ) بين أن: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad u_n \in]0,1[$ — 0.5

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . — 0.5

ج) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ — 0.5

www.students.ma

التمرين الخامس:(2 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \; ; \; x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0.5
2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0,+\infty[$ ، نضع $L(x)=\int_x^1 g(t)dt$	
أ)بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0.25
ب)أحسب $L(x)$ من أجل $x>0$	0.25
ج)أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$	0.5
3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n=\dfrac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\dfrac{p}{n}\right)$.	
بين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.	0.5

انتهى

www.students.ma