www.students.ma

التمرين الاول (البنيات الجبرية)

1) أ) لدينا: $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); x*y=x+y-2=y+x-2=y*x$

إذن $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); x*y=y*x$

ومنه القانون $*$ تبادلي.

و لدينا

$\left(\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right);(x*y)*z=(x*y)+z-2=x+y-2+z-2=x+(y+z-2)-2=x+(y*z)-2=x*(y*z)$

إذن $\left(\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right);(x*y)*z=x*(y*z)$

و منه القانون $*$ تجميعي

خلاصة :

القانون $*$ تبادلي.و تجميعي

ب) ليكن e من $\mathbb{Z}$ $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right); x*e=x\Leftrightarrow x+e-2=x\Leftrightarrow e=2$ و بما أن $*$ تبادلي فإن

2 هو العنصر المحايد ل $*$

ج) ليكن x و y من $\mathbb{Z}$

$x*y=2\Leftrightarrow x+y-2=2\Leftrightarrow y=4-x$

إذن لكل x من $\mathbb{Z}$ مماثل بالنسبة ل $*$ هو $4-x$

القانون $*$ تبادلي.و تجميعي ويقبل عنصرا محايد هو 2 و لكل x من $\mathbb{Z}$ مماثل بالنسبة ل $*$ هو $4-x$

إذن

$(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية.

2) أ) لدينا $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); f(x)\mathrm{T}f(y)=(x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6$

$=xy+2x+2y+4-2x-4-2y-4+6$

$=xy+2$

$=f(xy)$

إذن $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); f(x\times y)=f(x)\mathrm{T}f(y)$

نستنتج أن f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

وبما أن لكل x من $\mathbb{Z}$ سابق و حيد ب f في $\mathbb{Z}$ هو $x-2$ فإن f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ و منه :

f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

ب) لدينا $\left(\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right);(x*y)\mathrm{T}z=(x+y-2)\mathrm{T}z$

$=(x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6$

$=(xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+6)-2$

$=(x\mathrm{T}z)+(y\mathrm{T}z)-2$

$=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$

و منه

$\left(\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right);(x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$

3) لدينا $\left(\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); x\mathrm{T}y=y\mathrm{T}x$ إذن القانون T تبادلي.

وحسب السؤال 2) ب) نستنتج أن القانون T توزيعي على القانون $*$

بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$ و $\times$ تجميعي في $\mathbb{Z}$ فإن T تجميعي في $\mathbb{Z}$

و بما أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية و T تجميعي و تبادلي و توزيعي على القانون $*$ فإن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية

لنبين أن القانون T يقبل عنصرا محايدا e في $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{Z}),\ x\mathrm{T}e=x &\Leftrightarrow xe-2x-2e+6=x\\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{Z};\ x(e-3)=2(e-3)\\ &\Leftrightarrow e=3\end{aligned}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{Z};\ x\mathrm{T}3=3\mathrm{T}x=x$ ومنه 3 هو العنصر المحايد للقانون T

نستنتج من كل ما سبق أن

$(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية و واحدية

4) أ) لدينا

$$\begin{aligned}x\mathrm{T}y=2 &\Leftrightarrow xy-2x-2y+6=2\\ &\Leftrightarrow xy-2x-2y+4=0\\ &\Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=0\\ &\Leftrightarrow x=2 \text{ أو } y=2\end{aligned}$$

إذن

$x\mathrm{T}y=2 \Leftrightarrow x=2$ أو $y=2$

ب) لدينا $x\mathrm{T}y=2 \Leftrightarrow x=2$ أو $y=2$ حيث 2 هو صفر الحلقة $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$

إذن

$(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة كاملة

ج) لدينا $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية و واحدية

و لدينا

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{Z}/\{2\});\ x\mathrm{T}y=3 &\Leftrightarrow xy-2x-2y+6=3\\ &\Leftrightarrow y(x-2)=2x-3\\ &\Leftrightarrow y=\frac{2x-3}{x-2}\end{aligned}$$

من أجل $x=5$ نحصل على $y=\frac{7}{3}\notin\mathbb{Z}$

إذن 5 ليس له مقلوبا بالنسبة ل T

نستنتج أن

$(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ ليس جسم

التمرين الثاني

I

1) مميز المعادلة $(E):2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$:

لدينا $\Delta=\left(3+i\sqrt{3}\right)^2a^2-8\left(1+i\sqrt{3}\right)\ a^2=\left(9+6i\sqrt{3}-3-8\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)a^2=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)a^2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$

إذن

$$\boxed{\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 a^2}$$

2) بما أن $a\in\mathbb{C}^*$ فإن ل (E) حلين مختلفين هما :

$$z_1=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a+\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=\frac{a+ai\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a-\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=a$$

ومنه مجموعة حلول (E) هي :

$$\boxed{S=\left\{a,\frac{a+ai\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

II

1) لدينا

$$\frac{a}{b}=e^{i\frac{-\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases}\left|\frac{a}{b}\right|=1\\ \arg\left(\frac{a}{b}\right)\equiv\frac{-\pi}{3}[2\pi]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{OA}{OB}=1\\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{-\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$$

إذن

$\boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متساوي الأضلاع}}$

2) أ) لدينا r دوران مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$ إذن r^{-1} دوران مركزه M و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

إذن

$$\begin{cases}B_1=r(B)\\ A_1=r^{-1}(A)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b_1-z=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-z)\\ a_1-z=e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_1=z+\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(a-z)\\ b_1=z+\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(b-z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+z\left(1-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\\ b_1=z\left(1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 a\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + z\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ b_1 = z\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a \end{cases}$$

و منه

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{aligned}}$$

ب) لدينا $a_1 + b_1 = z$ إذن $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OM}$ و منه

$\boxed{\text{الرباعي } OA_1MB_1 \text{ متوازي أضلاع}}$

3) أ) لدينا $\begin{cases} a_1 - z = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 - z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - a_1 = e^{i\frac{-\pi}{3}}(z-a) \\ b_1 - z = ae^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}z \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - z = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a) \\ b_1 - z = -e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - ae^{i\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} = -e^{i\frac{-\pi}{3}}\frac{\left(z - a\times\frac{b}{a}\right)}{z-a}$$

$$\Rightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{a}{b}\times\frac{(z-b)}{z-a}$$

و أخيرا

$$\boxed{\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{a}{b}\times\frac{z-b}{z-a}}$$

ب) المثلث OAB متساوي الأضلاع إذن النقط M و O و A و B غير مستقيمية .

ومنه النقط M و O و A و B متداورة $\Leftrightarrow \frac{b-z}{a-z} \div \frac{b-0}{a-0} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{b-z}{a-z}\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow M \text{ و } A_1 \text{ و } B_1 \text{ مستقيمية}$$

نستنتج أن

النقط M وO وA وB متداورة يكافئ M و A_1 و B_1 مستقيمية

التمرين الثالث (الحسابيات)

1) أ) لدينا $n>1$ و يحقق $(R):3^n-2^n\equiv 0[n]$ و p أصغر قاسم أولي موجب ل n

إذن $\begin{cases}n\mid 3^n-2^n\\ p\mid n\end{cases}$ و منه $p\mid 3^n-2^n$ و بالتالي $3^n-2^n\equiv 0[p]$

لنبين أن $p\geq 5$

لدينا $\left(p=3\Rightarrow\begin{cases}3\mid 2^n\\ 3\mid 3^n-2^n\end{cases}\Rightarrow 3\mid 2^n\Rightarrow 3\mid 2\right)$و$\left(p=2\Rightarrow\begin{cases}2\mid 2^n\\ 2\mid 3^n-2^n\end{cases}\Rightarrow 2\mid 3^n\Rightarrow 2\mid 3\right)$

و بما أن 2 لايقسم 3 و 3 لايقسم 2 فإن (الإستلزام المضاض للعكس) $p\neq 2$ و $p\neq 3$ نستنتج أن $p\geq 5$

ومنه

$p\geq 5$ و $3^n-2^n\equiv 0[p]$

ب) بما أن $p\geq 5$ فإن p لايقسم 2 و p لايقسم 3

إذن حسب مبرهنة فرما الصغرى

$2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$

ج) بما أن p أصغر قاسم أولي موجب ل n فإن جميع قواسم $p-1$ لا تقسم n باستثناء 1

نستنتج أن $n\wedge(p-1)=1$

إدن حسب مبرهنة بوزو يوجد (α,β) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث $\alpha n+\beta(p-1)=1$

و بوضع $\alpha=a$ و $b=-\beta$ نحصل على المطلوب

$\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2; an-b(p-1)=1$

د) لدينا $\begin{cases}an-b(p-1)=1\\ a=q(p-1)+r\end{cases}\Rightarrow 1+b(p-1)=nq(p-1)+nr\Rightarrow nr=1+(b-nq)(p-1)$

بوضع $k=b-nq$ نحصل على $nr=1+k(p-1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بقي أن نبين أن $k\in\mathbb{N}$

يكفي أن نبين أن $r\geq 1$

حسب السؤال ج) لدينا $a=1\wedge(p-1)$ و بما أن $p-1\geq 4$ فإن $p-1$ لايقسم a ومنه $r\geq 1$

وبما أن $n>1$ فأن $nr>1$ و من $nr-1=k(p-1)$ نستنتج أن : $k\in\mathbb{N}$

خلاصة

يوجد عدد صحيح طبيعي k يحقق $nr=1+k(p-1)$

2) نفترض أنه يوجد $n>1$ و يحقق الخاصية (R)

لدينا حسب السؤال ب) $2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$ و لدينا $k\in\mathbb{N}$ إذن $2^{k(p-1)}\equiv 1[p]$ و $3^{k(p-1)}\equiv 1[p]$

و بما أن $nr-1=k(p-1)$ فإن $2^{nr-1}\equiv 1[p]$ و$3^{nr-1}\equiv 1[p]$ و منه $3^{nr}\equiv 3[p]$ و $2^{nr}\equiv 2[p]$

نستنتج أن $3^{nr}-2^{nr}\equiv 1[p]$ (1)

و حسب السؤال 1) أ) $3^n-2^n\equiv 0[p]$

يعني أن $3^n\equiv 2^n[p]$ أي أن $3^{nr}\equiv 2^{nr}[p]$ ما يعني أن $3^{nr}-2^{nr}\equiv 0[p]$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن $1\equiv 0[p]$ أي أن p يقسم 1 ز هذا تناقظ

إذن الإفتراض الأول خاطئ

خلاصة:

لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية (R)

المسألة

الجزء الأول

1) أ) لدينا $\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x-1}}=1=h(1)$ (لأن $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$)

نستنتج أن

h متصلة على يمين 1

ب) لدينا $(\forall t\geq x>1);\dfrac{1}{t}<1\Rightarrow\int_1^x\dfrac{1}{t}dt<\int_1^x 1dt\Rightarrow\ln x<x-1$

إذن

$(\forall x>1);\ln x<x-1$

لدينا $(\forall x>1);h'(x)=\dfrac{x\ln x-(x-1)(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-(x-1)}{(x\ln x)^2}$

و بما أن $(\forall x>1);\ln x<x-1$ فإن $(\forall x>1);h'(x)<0$

إذن

h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x}=0$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$)

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

جدول تغيرات h

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	1 ↘	0

ب) بما أن h متصلة و تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$ فإن $h([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x);h(1)\right]=]0,1]$

ومنه $\forall x\geq 1; h(x)\in]0,1]$

نستنتج أن

$$\forall x\geq 1; 0<h(x)\leq 1$$

الجزء الثاني

1) أ) لدينا $(\forall x>1); \int_x^{x^2}\dfrac{1}{t\ln t}dt=\left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}=\ln|\ln x^2|-\ln|\ln x|=\ln\left|\dfrac{2\ln x}{\ln x}\right|=\ln 2$

إذن

$$\forall x>1; \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$$

ب) لدينا

$$(\forall x>1); g(x)-g(2)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt-\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$$

إذن

$$(\forall x>1); g(x)-g(2)=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$$

ج) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير و بوضع $\sqrt{t}=\alpha$ نحصل على

$$\begin{cases} t=x\Rightarrow \alpha=\sqrt{t}=\sqrt{x} \\ t=x^2\Rightarrow \alpha=\sqrt{t}=x \\ \dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\Rightarrow dt=2\sqrt{t}d\alpha \end{cases}$$

$(\forall x>1); g(x)-g(2)=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\alpha-1}{\alpha^2\ln\alpha^2}2\alpha d\alpha=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\alpha-1}{\alpha\ln\alpha}d\alpha=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$ ومنه

نستنتج أن

$$\boxed{(\forall x>1); g(x)-g(2)=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt}$$

2) أ) لدينا $\forall x>1;\sqrt{x}\le t\le x$

h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$ و $\forall x>1,\left[\sqrt{x},x\right]\subset]1,+\infty[$ إذن h تناقصية قطعا على $\left[\sqrt{x},x\right]$

و منه $\forall x>1;\sqrt{x}\le t\le x\Rightarrow h(x)\le h(t)\le h\left(\sqrt{x}\right)\overset{(x>\sqrt{x})}{\Rightarrow}\int_{\sqrt{x}}^{x}h(x)dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h\left(\sqrt{x}\right)dt$

$\Rightarrow\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

و بالتالي

$$\boxed{(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)}$$

ب) لدينا حسب 2) أ) من الجزء الثاني $(\forall x>1);\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)}{x-1}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)}{x-1}$

و بعد إختزال $\sqrt{x}-1$ نحصل على $(\forall x>1);\frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\frac{\sqrt{x}h\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+1}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}h\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{1}{2}$

نستنتج أن

$$\boxed{g \text{ قابلة للإشتقاق غلى يمين 1 و أن } g'_d(1)=\frac{1}{2}}$$

ج) لدينا $(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2$

يستلزم $(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}+\ln 2\le g(x)$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}+\ln 2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{x-1}{x}+\ln 2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln 2=+\infty$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$$

كما لدينا $(\forall x>1);\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)+\ln 2}{x}\le\dfrac{g(x)}{x}\le\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)+\ln 2}{x}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\dfrac{x-1}{x\ln x}+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\ln 2}{x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}+\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x\ln\sqrt{x}}+\dfrac{\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{\ln\sqrt{x}}+\dfrac{\ln 2}{x}=0$

فإن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$$

3) أ) الدالة $t\to\dfrac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ متصلة على المجال $]1,+\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية φ على هذا المجال

نستنتج أن $\forall x>1;g(x)=\varphi\left(x^2\right)-\varphi(x)$

بما أن φ قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ فإن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ كمركب دوال قابلة للإشتقاق

و لدينا $(\forall x>1);g'(x)=2x\varphi'\left(x^2\right)-\varphi'(x)=2x\dfrac{1}{x\ln x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}\ln x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

و منه

$$\forall x>1;g'(x)=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$$

ب) لدينا: $(\forall x\ge 1);1\le\sqrt{x}\le x\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)\le h\left(\sqrt{x}\right)\le h(1)\overset{(h(x)>0)}{\Rightarrow}\dfrac{1}{2}h(x)\le\dfrac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)\le\dfrac{h(1)}{2}\Rightarrow 0<g'(x)\le\dfrac{1}{2}$

إذن

$$\forall x\ge 1;0<g'(x)\le\frac{1}{2}$$

و منه جدول تغيرات الدالة g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$\ln 2$ ↗	$+\infty$

ج) منحنى الدالة g

الجزء الثالث

I 1) الدالة k قابلة للإشتقاق على $[1,+\infty[$ و $(\forall x\in[1,+\infty[);k'(x)=g'(x)-1$

و لدينا $\forall x\in[1,+\infty[;-1<g'(x)-1\le-\frac{1}{2}\Rightarrow\forall x\in[1,+\infty[;-1<k'(x)\le-\frac{1}{2}$

نستنتج أن $\forall x\in[1,+\infty[;k'(x)<0$ ومنه k تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$

و بما أنها متصلة عليه فإنها تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $k([1,+\infty[)$ مع $k([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}k(x),k(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$) و $k(1)=\ln 2$

نستنتج أن $k([1,+\infty[)=]-\infty,\ln 2]$

و منه

k تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $]-\infty,\ln 2]$

2) بما أن $0\in]-\infty,\ln 2]$ فإن ل 0 سابق وحيد α بالدالة k من المجال $]1,+\infty[$

إذن $k(\alpha)=0$ ومنه $g(\alpha)-\alpha+1=0$

نستنتج أ نه

$\exists!\alpha\in]1,+\infty[\,/\,1+g(\alpha)=\alpha$

II 1) أ) برهان بالترجع

لدينا $1\le u_0<\alpha$

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن $1\le u_n<\alpha$.

لدينا $1\le u_n<\alpha\overset{(g\nearrow)}{\Rightarrow}g(1)\le g(u_n)<g(\alpha)$

$\Rightarrow\ln 2\le u_{n+1}-1<\alpha-1$

$\Rightarrow\ln 2+1\le u_{n+1}<\alpha$

$\Rightarrow 1\le u_{n+1}<\alpha$

إذن حسب مبدأ الترجع

$\forall n\in\mathbb{N};1\le u_n<\alpha$

ب) لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}-u_n=1+g(u_n)-u_n=k(u_n)$

كما لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});u_n<\alpha\overset{(k\searrow)}{\Rightarrow}k(u_n)>k(\alpha)$

وبما أن $k(\alpha)=g(\alpha)-\alpha+1=0$

نستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-u_n>0$

و منه

(u_n) متتالية تزايدية قطعا

ج) (u_n) متتالية تزايدية قطعا و مكبورة ب α إذن فهي متقاربة و لتكن l نهايتها

لدينا $\forall n\in\mathbb{N};1\le u_n<\alpha\Rightarrow l\ge 1$ و بما أن g متصلة على $[1,+\infty[$ فإن g متصلة عند l

إذن $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=1+g(u_n)\Rightarrow l=1+g(l)\Rightarrow k(l)=0\Rightarrow l=\alpha$

و بالتالي

$$\lim u_n=\alpha$$

2) أ) لدينا $\forall n\in\mathbb{N};[u_n,\alpha]\subset[1,+\infty[$

إذن g متصلة على $[u_n,\alpha]$ و قابلة للإشتقاق على $]u_n,\alpha[$ و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists c\in]u_n,\alpha[;\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}=g'(c)$$

و بما أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $1\le u_n<c<\alpha\Rightarrow c>1\Rightarrow 0<g'(c)\le\frac{1}{2}\Rightarrow|g'(c)|\le\frac{1}{2}$

فإن $\forall n\in\mathbb{N};\left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|g'(c)|\le\frac{1}{2}$ ما يستلزم أن $|g(u_n)-g(\alpha)|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

و بما أن $(\forall n\in\mathbb{N});g(u_n)-g(\alpha)=u_{n+1}+1-\alpha+1=u_{n+1}-\alpha$

فإن

$$\forall n\in\mathbb{N};\quad |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

ب) برهان بالترجع

من أجل $n=0$ العلاقة تكتب $|u_0-\alpha|\le|u_0-\alpha|$ وهذا صحيح

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$ و نبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|\Rightarrow|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

وبالتالي و حسب مبدأ الترجع

$$\forall n\ge 0;|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$$

ج) بما أن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|=0$ فإن $\lim|u_n-\alpha|=0$

نستنتج أن

$$\lim u_n=\alpha$$

مرحب بملاحظاتكم عبر العنوان : y_mghazli@hotmail.com

إنتهى