

المادة: الرياضيات	الشعبة: العلوم الرياضية (أ و ب)	المدة: 4 ساعات	المعامل: 10
-------------------	------------------------------------	----------------	-------------

التمرين الأول :

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

$$\text{لكل } (a,b) \text{ و } (x,y) \text{ من } \mathbb{R}^2 : (a,b) * (x,y) = \left(\frac{ax+by}{2}, \frac{ay+bx}{2} \right)$$

$$\text{لتكن المجموعة } E = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m \in \mathbb{R}^* \right\}$$

(1) بين أن * قانون داخلي في المجموعة E

$$(2) \text{ ليكن التطبيق } \varphi \text{ المعرف } \mathbb{R}^* \text{ من نحو } E \text{ بما يلي : } (\forall m \in \mathbb{R}^*) \varphi(m) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$$

(أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, *)$

(ب) استنتج أن $(E, *)$ زمرة تبادلية محدا عناصرها المحايد ومماثل كل عنصر $\left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right)$

حيث عدد m حقيقي غير منعدم .

$$(3) \text{ نعتبر المجموعة } F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4 \right\}$$

$$(أ) \text{ بين أن } F = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0 \right\}$$

(ب) بين أن $(F, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$

التمرين الثاني:

الجزء الأول :

p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر أو يساوي 5

$$(1) \text{ بين ان : } p^2 \equiv 1 [3]$$

(2) (أ) باستعمال زوجية العدد p ، بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث

$$p^2 - 1 = 4q(q+1)$$

(ب) استنتج أن : $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$

(3) بين أن : $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$

الجزء الثاني :

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24 .

(1) بين أن : $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$

(2) هل توجد أعداد صحيحة طبيعية $a_1, \dots, a_{23}$ حيث : $a_k \wedge 24 = 1$ لكل k من $\{1, \dots, 23\}$ و

($a_1^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997$) ؟ ($a_k \wedge 24$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_k و 24)

التمرين الثالث

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $\mathcal{C}_f$ منحنىها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

(1) أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

(ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

(ج) بين أن f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) بين أن : $(\forall t \geq 0) \quad 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

(ج) بين ان : $(\forall x > 0) \quad -\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

(د) استنتج أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مقارباً مائلاً (Δ) ينبغي تحديد معادلة له .

(3) أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_f$ و المستقيم (Δ)

الجزء الثاني

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

(1) بين أن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

(2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0, +\infty[$

(3) (أ) بين أن ، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f_n(x) = \frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0, +\infty[$

$$(b) \text{ بين أن : } (\forall x > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

(ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة .

$$\text{نضع : } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

$$(d) \text{ بين أن : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) na_n = 2e^{a_n} - 2$$

$$(h) \text{ بين أن } a = 0 .$$

الجزء الثالث

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

(f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)

$$(1) (a) \text{ بين أن : } (\forall x > 0) \quad xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$$

$$(b) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

(2) (أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$

$$(b) \text{ بين أن : } \begin{cases} F'(x) = e^{-\frac{2}{x}} \left((x+2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}} \right) ; x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$$

($F'_d(0)$ هو العدد المشتق للدالة F في 0 على اليمين)

(3) أعط جدول التغيرات الدالة F

التمرين الرابع

$$\text{لكل عدد عقدي } z \text{ مخالف للعدد } -1 , \text{ نضع : } f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$$

$$(1) (a) \text{ حدد العدد الحقيقي } y \text{ بحيث : } f(iy) = iy$$

$$(b) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } f(z) = z \quad (E)$$

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 حلول المعادلة (E) حيث $Re(z_0)=0$ و $Re(z_1) > Re(z_2)$

(2) أ) تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب) استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2

(3) في هذا السؤال نفترض أن $z=e^{i\alpha}$ حيث $0 \leq \alpha < \pi$.

أ) بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$

ب) حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$

ج) اكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

(4) حدد z إذا علمت أن
$$\begin{cases} |z|=1 \\ Re(z)=\frac{1}{2} \end{cases}$$