المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

القدرات المنتظرة
- * إدراك العلاقات بين الأعداد والتمييز بين مختلف مجموعات الأعداد.
- * تحديد كتابة مناسبة لتعبير جبري حسب الوضعية المدروسة.

I) المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

أنشطة

$a \in E$ تعني a عنصر من E و تقرأ a تنتمي الى E

ضع العلامة × في الخانة المناسبة

	5	$-\frac{250}{3}$	3,14	-4	$\frac{22}{7}$	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{100}$	1,33……
$\in \mathbb{N}$									
$\in \mathbb{Z}$									
$\in ID$									
$\in \mathbb{Q}$									
$\in \mathbb{R}$									

1- مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

تذكير

*مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية هي $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5........... \rightarrow\}$

الاعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة الاعداد الصحيحة النسبية يرمز لها بـ $\mathbb{Z}$
نكتب $\mathbb{Z} = \{\leftarrow .....;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;..... \rightarrow\}$

-5 عدد صحيح نسبي نكتب $-5 \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}$ ليس عددا صحيحا نسبيا نكتب $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

0 العدد الصحيح النسبي المنعدم

* نرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة النسبية الغيلر المنعدمة بـ $\mathbb{Z}^*$

$$\mathbb{Z}^* = \{\leftarrow .....;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;..... \rightarrow\}$$

ملاحظة: كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي

نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ جزء من المجموعة $\mathbb{Z}$ أو المجموعة $\mathbb{N}$ ضمن المجموعة $\mathbb{Z}$

نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2- مجموعة الأعداد العشرية النسبية

اكتب الاعداد التالية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$

3,12 ، 7 ، -3 ، -0,256

تعريف

كل عدد له كتابة كسرية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ يسمى عددا عشريا نسبيا.
نرمز لمجموعة الاعداد العشرية النسبية بـ ID

نتائج

أ – العدد العشري له كتابة بعدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة.

ب- كل عدد صحيح نسبي a هو عدد عشري نسبي (لأنه يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{10^0}$)

إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID$

3- مجموعة الأعداد الجذرية

تعريف

العدد الجذري هو كل عدد يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{b}$ حيث $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{Z}$ و $b\neq 0$

يرمز لمجموعة الاعداد الجذرية بـ$\mathbb{Q}$

$\frac{-3}{7}$ عدد جذري ، 6 عدد جذري $-1,36$ عدد جذري π ليس عددا جدريا

$\sqrt{3}$ ليس عددا جدريا

نتيجة

كل عدد عشري نسبي هو عدد جدري

إذن $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}$

4- مجموعة الأعداد الحقيقية

- بين أن $\sqrt{2}$ عدد لا جذري

أرسم مربع ضلعه 1 و حدد طول قطره

- نصف محيط دائرة شعاعها 1 هو عدد لا جذري يرمز له بـ π

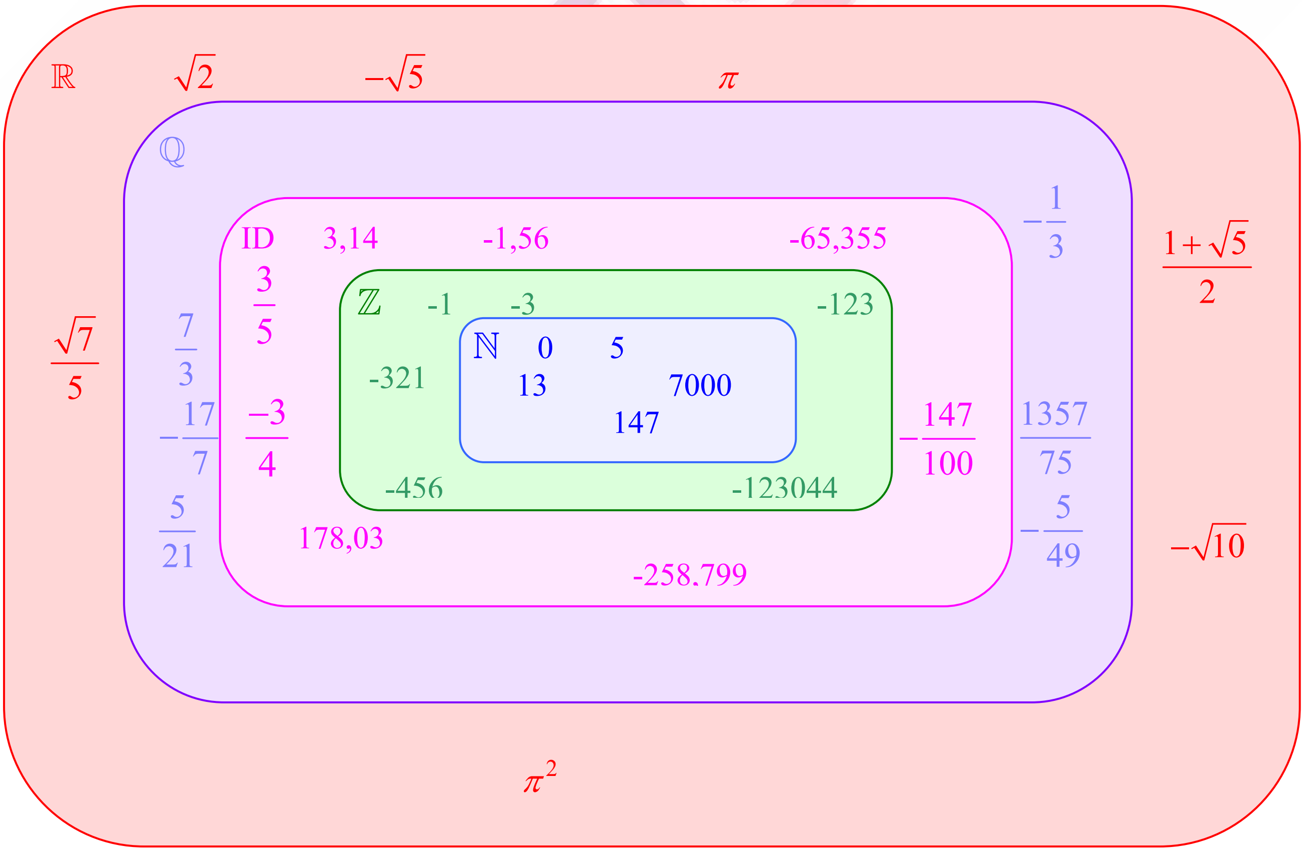
توجد مقادير لا يمكن التعبير عنها بأعداد جذرية ، مثل هذه المقادير نعبر عنها باعداد لا جذرية.

الاعداد الجذرية و الاعداد لا جذرية تكون مجموعة تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية

يرمز لها بـ$\mathbb{R}$

نتيجة

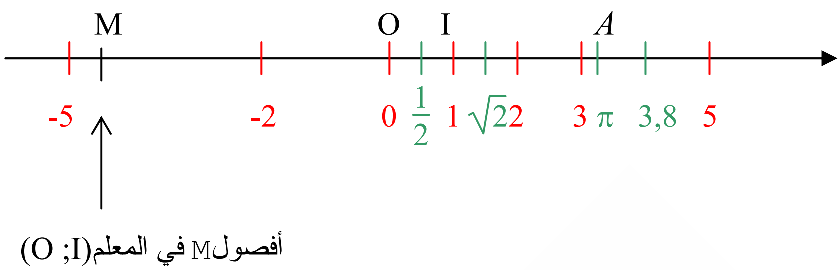
كل عدد جذري هو عدد حقيقي إذن $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset ID\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$



تمثيل المجموعة $\mathbb{R}$

نمثل المجموعة $\mathbb{R}$ على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

كل نقطة من المستقيم $\Delta(O;I)$ تقبل عددا وحيدا أفصولا لها
كل عدد حقيقي هو افصول لنقطة و حيدة من المستقيم $\Delta(O;I)$



A هي النقطة ذات الافصول π نكتب $A(\pi)$

II) العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ و خاصياتها

1 – أنشطة

نشاط1

1-أحسب $-\frac{2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $\quad \dfrac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$

2-لتكن a و b و c أعداد حقيقية
أحسب $-2(a+b-c)-3(a-b+c)+4(5a-b)$

نشاط2

1-أحسب $\sqrt{5^2\times3^3}+\sqrt{75}-11\sqrt{3}+2\sqrt{243}$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

2-أ- أحسب $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم بسط $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

ب- بسط $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$; $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

3- اجعل المقام عددا جذريا للعددين الحقيقيين $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

4- بين أن $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=4$

نشاط3

1- عمل $(x+2)^2+x^2-4$ ، $(2x-1)^2-(3x+2)^2$ ، $27x^3-8$; $x^3+125-5x(x+5)$

2- نضع $a+b=1$; $a^2+b^2=2$ أحسب a^4+b^4 ; a^6+b^6

2- الجمع و الضرب

أ- الجمع

* الجمع تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a+b=b+a$
* الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $\quad (a+b)+c=a+(b+c)$
* 0 هو العنصر المحايد للجمع في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $\quad 0+a=a+0=a$
* لكل عدد حقيقي a مقابل هو $-a$: $\quad -a+a=a+(-a)=0$

ب- الطرح

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a-b=a+(-b)$

ج- الضرب

* الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $\quad a\times b=b\times a$

* الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$
* 1 هو العنصر المحايد لضرب في $\mathbb{R}$: لكل a من $\mathbb{R}$ $1\times a = a\times 1 = a$
* لكل عدد حقيقي غير منعدم a مقلوب هو $\frac{1}{a}$ (a^{-1}) : $a^{-1}\times a = a\times a^{-1} = 1$
* الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{R}$: لكل a و b و c من $\mathbb{R}$

$$(b+c)\cdot a = ba+ca \quad ; \quad a\cdot(b+c) = ab+ac$$

د- الخارج

ليكن a من $\mathbb{R}$ و b من $\mathbb{R}^*$ $\frac{a}{b} = a\times\frac{1}{b}$

ذ- قواعد

* لتكن a و b و c من $\mathbb{R}$: $a=b$ تكافئ $a+c=b+c$
* لتكن a و b من $\mathbb{R}$ و c من $\mathbb{R}^*$: $a=b$ تكافئ $ac=bc$
* لكل a و b و c و d من $\mathbb{R}$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $a+c=b+d$

إذا كان $a=b$ و $c=d$ فان $ac=bd$

* $ab=0$ تكافئ $a=0$ أو $b=0$

$ab\neq 0$ تكافئ $a\neq 0$ و $b\neq 0$

* لكل a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ تكافئ $ad=bc$

* a و b من $\mathbb{R}$ و c و d من $\mathbb{R}^*$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd} \quad ، \quad \frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$$

* لكل a من $\mathbb{R}$ و b و c و d من $\mathbb{R}^*$

$$\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{c}{b} \quad ، \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

2- الجذور المربعة

أ- تعريف

ليكن x من $\mathbb{R}^+$

العدد الحقيقي الموجب y الذي يحقق $y^2=x$ يسمى لجذر المربع للعدد الموجب x.

نرمز للجذر مربع للعدد x بـ $\sqrt{x}$

$x=y^2 \;;\; y\geq 0$ تكافئ $y=\sqrt{x} \;;\; x\in\mathbb{R}^+$

ب- نتائج

*- ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad ; \quad \sqrt{x^2}=x \quad ; \quad \sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad (y\neq 0)$$

$\sqrt{x}=\sqrt{y}$ تكافئ $x=y$

* إذا كان x سالبا فان $\sqrt{x^2}=-x$

ملاحظة: لكل عدد حقيقي موجب a يوجد عددان حقيقيان مربعهما يساوي a هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

3- القوى
أ- تعريف

* ليكن a من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times......\times a}_{n \text{ عاملا}} \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0)$$

العدد a^n يسمى قوة العدد a ذات الأس n

العدد a^{-n} يسمى قوة العدد a ذات الأس $-n$

* ليكن a من $\mathbb{R}^*$ $a^0=1$

ب- نتائج

-* لكل x و y من $\mathbb{R}^*$ و لكل n و m من $\mathbb{Z}$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m} \qquad x^n x^m = x^{n+m}$$

$$x^{-n}=\left(\frac{1}{x}\right)^n \qquad \frac{x^n}{y^n}=\left(\frac{x}{y}\right)^n \qquad \left(x^n\right)^m = x^{n\cdot m}$$

* لكل عدد حقيقي موجب x: $\sqrt{x^n}=\sqrt{x}^n$

حالة خاصة لكل x من $\mathbb{R}$ $x^1=x$

ج- الكتابة العلمية لعدد عشري

خاصية (مقبولة)

كل عدد عشري b موجب يكتب على شكل $a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1\leq a\leq 10$
هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية للعدد b

أمثلة

الكتابة العلمية للعدد 1740000 هي $1,74\times 10^6$

الكتابة العلمية للعدد $0,000325$ هي $3,25\times 10^{-4}$

نتيجة:

كل عدد عشري b سالب يكتب على شكل $-a.10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1\leq a\leq 10$

$$-1,74\times 10^6 = -1740000 \qquad -0,000325 = -3,25\times 10^{-4}$$

4- متطابقات هامة

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

5- النشر و التعميل

نشر جداء هو تحويله إلى مجموع

تعميل مجموع هو تحويله إلى جداء