

- * حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)
- * حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ مثلا هي أفاصيل نقط المستوى (P) التي يكون (C_f) تحت (C_g)

تقارين وحلولها

تمرين 1 :

- لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = -x^2 + 2$ و $(\mathcal{E})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega (0, 2)$
- 1 - حدد معادلة ديكراتية لـ $(\mathcal{E})$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
 - أ - حدد نقط تقاطع $(\mathcal{E})$ مع محوري المعلم.
 - ب - أنشئ المنحنى $(\mathcal{E})$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - ج - استنتج جدول تغيرات f
 - 3 - حل مبيانيا المتراجحتين $f(x) \geq 0$ و $f(x) < 1$

الجواب :

- 1 - معادلة المنحنى (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي $y = f(x)$

$$y = -x^2 + 2 \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = -x^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

معادلة (C_f) تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega (0, 2)$

2 - أ - (C_f) يقطع محور الأرتايب في $I (0, f(0))$ أي $\Omega (0, 2)$

$$-x^2 + 2 = 0 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 0$$

$$x^2 = 2 \quad \text{يعني}$$

$$x = -\sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{يعني}$$

تمرين 2 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

(C) منحنى الدالة f في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

و $\Omega (1, -1)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أ - حدد نقط تقاطع (Cf) مع محوري المعلم

ب - أنشئ (Cf) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

3 - حل مبيانيا المتراجحتين :

$$f(x) \geq 3 \quad \text{و} \quad f(x) \leq 0$$

الجواب :

1 - معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$y = f(x) \quad \text{هي :}$$

$$y = x^2 - 2x \quad \text{يعني}$$

$$y + 1 = x^2 - 2x + 1 \quad \text{يعني}$$

$$y + 1 = (x - 1)^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

معادلة (Cf) في المعلم هي $Y = X^2$

المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega (1, -1)$

2 - أ - نقطة تقاطع (C) مع محور الأرتاب هي

$$O (0, 0) \quad \text{أي} \quad O (0, f(0))$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \text{أي} \quad f(x) = 0$$

$$x(x - 2) = x \quad \text{يعني}$$

ومنه (Cf) يقطع محور الأفاصيل في $A(\sqrt{2}, 0)$

و $B(-\sqrt{2}, 0)$

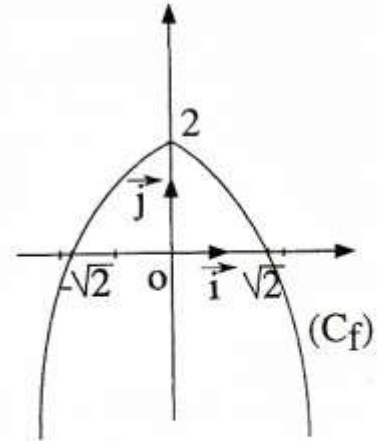
ب - معادلة (Cf) هي $Y = -X^2$ في المعلم

$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ إذن (Cf) عبارة عن شلجم

رأسه Ω موجه نحو الأسفل

يمكن الوصول لهذه النتيجة كالتالي (Cf) شلجم

رأسه $\Omega (-\frac{b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ أي $\Omega (0, 2)$ موجه نحو الأسفل.



ج - جدول تغيرات f

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)		2	

3 - $f(x) \geq 0$ يعني x توجد في المجال الذي

يكون فيه (Cf) فوق محور الأفاصيل

$$S = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$f(x) < 0$ يعني x توجد في المجال الذي

يكون فيه (Cf) تحت محور الأفاصيل إذن :

$$S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

والممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega(1, 1)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم

$$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$$

2 - أ - حدد تقاطع (C) مع محوري المعلم

$$(O, \vec{i}, \vec{j})$$

ب - أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - اعط جدول تغيرات f

4 - حل مبياناً المتراجحة $f(x) \leq 0$

5 - حدد مبياناً عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

حيث m بارامتر حقيقي.

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 2x^2 - 4x + 3 \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases} \quad \text{أي}$$

المعادلة في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 1)$

تكافئ

$$Y + 1 = 2(X + 1)^2 - 4(X + 1) + 3$$

يعني

$$Y + 1 = 2(X^2 + 2X + 1) - 4X - 4 + 3$$

$$Y + 1 = 2X^2 + 4X + 2 - 4X - 4 + 3$$

$$Y + 1 = 2X^2 + 1$$

$$Y = 2X^2$$

يعني $x = 0$ أو $x = 2$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في :

$$A(2, 0) \quad \text{و} \quad O(0, 0)$$

ب - معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

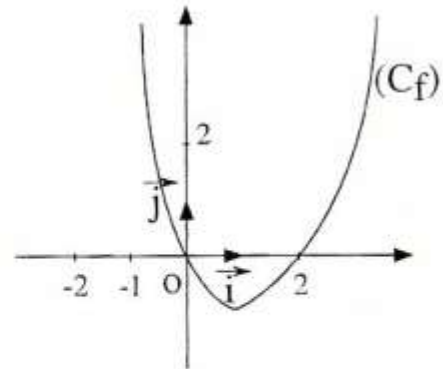
$$Y = X^2 \quad \text{هي :}$$

إذن (C_f) شلجم رأسه Ω وموجه نحو الأعلى

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ أي

$\Omega(1, -1)$ موجه نحو الأعلى.



3 - $f(x) \leq 0$ يعني x يوجد في المجال الذي

يكون فيه (C_f) تحت محور الأفاصيل

إذن $S = [0, 2]$

$f(x) \geq 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون

فيه (C_f) فوق محور الأفاصيل

$$S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

تمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)			

4 - لدينا $f(x) \leq 0$ يعني x يوجد في المجالات التي يكون فيها (C) تحت محور الأفاصيل. وبما أن (C) يوجد فوق محور الأفاصيل فإن $S = \emptyset$

5 - لدينا : $f(x) = m$ يعني x أفصول نقطة تقاطع (C) مع المستقيم $y = m$ (Δ) إذا كان $m = 1$ هناك حل وحيد وهو $x = 1$ لأن (Δ) يقطع (C) مرة واحدة. إذا كان $m < 1$ ليس هناك حل لأن (C) و (Δ) لا يتقاطعان. إذا كان $m > 1$ هناك حلين مختلفين لأن (Δ) يقطع (C) مرتين.

تمارين 4 :

- لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي :
- $$f(x) = -2x^2 + 2x - 1$$
- و (C) تمثيلها المبياني في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- 1 - حدد معادلة ديكراتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
- 2 - أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 3 - نعتبر الدالة g المعرفة بـ :

معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي $Y = 2X^2$

2 - أ- نقط تقاطع C_f ومحور الأرتيب هي : $A(0, f(0))$ أي أن $A(0, 3)$

لتحديد نقط تقاطع (C_f) ومحور الأفاصيل نحل المعادلة :

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$= 16 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= -8 < 0$$

إذن (C_f) لا يقطع محور الأفاصيل

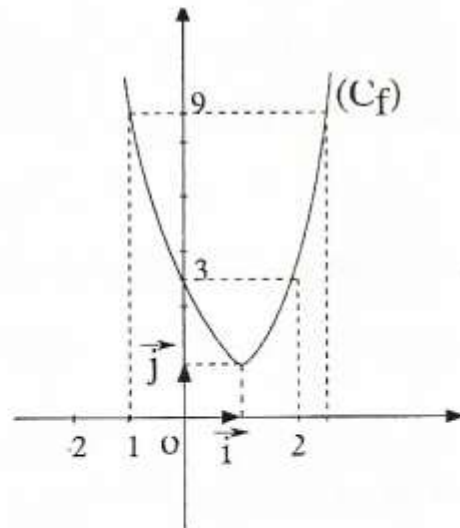
ج - (C_f) شلجم رأسه $\Omega(1, 1)$ ومحور تائله المستقيم ذو المعادلة $x = 1$

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ أي $\Omega(1, -1)$

لدينا

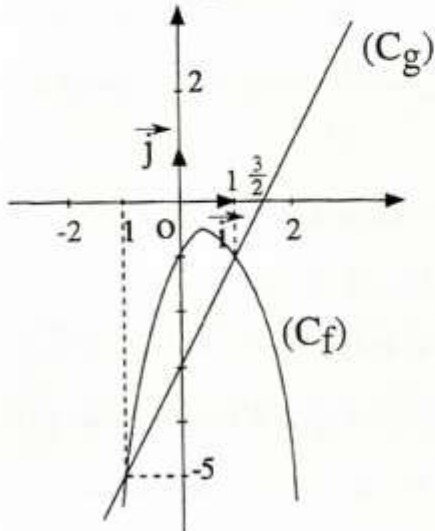
x	-1	0	1	2	3
f(x)	9	3	1	3	9



3 - جدول تغيرات f من خلال المنحنى

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega (\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$



3 - أ - (C') مستقيم معادلته $y = 2x - 3$

ب - $g(x) \leq f(x)$ يعني x توجد في المجال

الذي يكون فيه (C') تحت (C) إذن

$$S = [-1, \frac{3}{2}]$$

تمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

ومنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد نقط تقاطع (C) مع محور الأفاسيل

$$2 - \text{تحقق أن : } f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$$

لكل $x \in \mathbb{R}$

3 - أ - بين أنه لكل x_1 و x_2 من $\mathbb{R}$ بحيث

$x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

$$g(x) = 2x - 3$$

أ - أنشئ (C') منحنى g في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب - حل مبيانا المتراجحة $g(x) \leq f(x)$

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = -2x^2 + 2x - 1$

لدينا $\Omega (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{يعني}$$

معادلة (C) تكافئ

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X + \frac{1}{2})^2 + 2(X + \frac{1}{2}) - 1$$

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X^2 + X + \frac{1}{4}) + 2X + 1 - 1$$

$$Y - \frac{1}{2} = -2X^2 - 2X - \frac{1}{2} + 2X \quad \text{يعني}$$

$$Y = -2X^2 \quad \text{يعني}$$

إذن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي $Y = -2X^2$

2 - معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي

$Y = -2X^2$ إذن (C) شلجم رأسه Ω وموجه

نحو الأسفل

$$= \frac{\frac{1}{2}(x_1 + 2)^2 - 2 - \frac{1}{2}(x_2 + 2)^2 + 2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x_1 + 2 - x_2 - 2)(x_1 + 2 + x_2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4)}{2(x_1 - x_2)}$$

وبالتالي :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

ب - في المجال $]-\infty, -2]$

لدينا إذن $\begin{cases} x_1 \leq -2 \\ x_2 \leq -2 \end{cases}$

$$x_1 + x_2 \leq -4$$

$$x_1 + x_2 + 4 \leq 0$$

يعني

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \leq 0$$

إذن f تناقصية على $]-\infty, -2]$

في المجال $[-2, +\infty[$

لدينا إذن $\begin{cases} x_1 \geq -2 \\ x_2 \geq -2 \end{cases}$

$$x_1 + x_2 \geq -4$$

$$x_1 + x_2 + 4 \geq 0$$

إذن

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \geq 0$$

ومنه

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$$

أي

إذن f تزايدية على $[-2, +\infty[$

4 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب - استنتج رتبة الدالة f على المجالين

$$[-2, +\infty[\text{ و }]-\infty, -2]$$

4 - لتكن $\Omega(-2, -2)$ نقط من المستوى (P).

بين أن معادلة (C) هي $Y = \frac{1}{2}X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

5 - أنشئ المنحنى (C)

6 - حل مبيانيا المتراجحة $x^2 + 4x > 0$

الجواب :

1 - لدينا $f(x) = 0$ يعني $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 0$

$$x(\frac{1}{2}x + 2) = 0$$

يعني

$$\frac{1}{2}x + 2 = 0 \text{ أو } x = 0$$

يعني

$$x = -4 \text{ أو } x = 0$$

يعني

إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في

$$A(-4, 0) \text{ و } O(0, 0)$$

2 - لدينا

$$\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) - 2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - 2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x = f(x)$$

وبالتالي : $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$

3 - أ - ليكن x_1 و x_2 من $\mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

1 - حدد مجموعة التعريف D_f

2 - بين أن :

$$x \in D_f \quad \text{لكل} \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

3 - حدد طبيعة المنحنى (C_f) . حيث (C_f)

منحنى f في معلم متعامد ومُنظَّم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - أنشئ المنحنى (C_f)

5 - اعط جدول تغيرات f

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ $x - 1 \neq 0$

$$x \neq 1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{إذن}$$

2 - لدينا

$$2 + \frac{1}{x-1} - \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} = f(x)$$

$$x \in D_f \quad \text{لكل} \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

3 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 2 + \frac{1}{x-1}$$

$$y - 2 = \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$Y = \frac{1}{X} \quad \text{المعادلة تصبح}$$

في المعادلة $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 2)$

4 - المنحنى (C_f) هذلول مركزه $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{2}{1})$

$\Omega(1, 2)$ ومقارباة المستقيمان $x = 1$ و $y = 2$

هي $y = f(x)$

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 \quad \text{يعني}$$

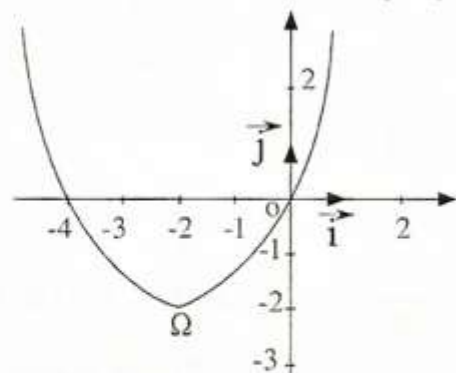
$$y + 2 = \frac{1}{2}(x+2)^2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$Y = \frac{1}{2}X^2 \quad \text{المعادلة تصبح}$$

في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(-2, -2)$

5 - (C_f) شلجم رأسه $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ أي $\Omega(-2, -2)$



5

6

$$\frac{1}{2}(x^2 + 4x) > 0 \quad \text{يعني} \quad x^2 + 4x > 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x > 0 \quad \text{يعني}$$

$$f(x) > 0 \quad \text{يعني}$$

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C)

فوق محور الأفاصيل

$$S =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[\quad \text{إذن}$$

تمرين 6 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

$(O, \vec{i}, \vec{j})$

5 - أنشئ (C_f) و (C_g) في معلمين مختلفين.

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ يعني $x - 2 \neq 0$

$$x \neq 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad \text{إذن}$$

لدينا $x \in D_g$ يعني $x - 1 \neq 0$

$$x \neq 1$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{إذن}$$

2 - تغيرات f

ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \left(\frac{2x+3}{x-2} - \frac{2y+3}{y-2} \right) \times \frac{1}{x-y} \\ &= \left(\frac{2xy - 4x + 3y - 6 - 2xy - 3x + 4y + 6}{(x-2)(y-2)} \right) \\ &\times \frac{1}{x-y} \end{aligned}$$

$$= \frac{-7x + 7y}{(x-2)(y-2)(x-y)}$$

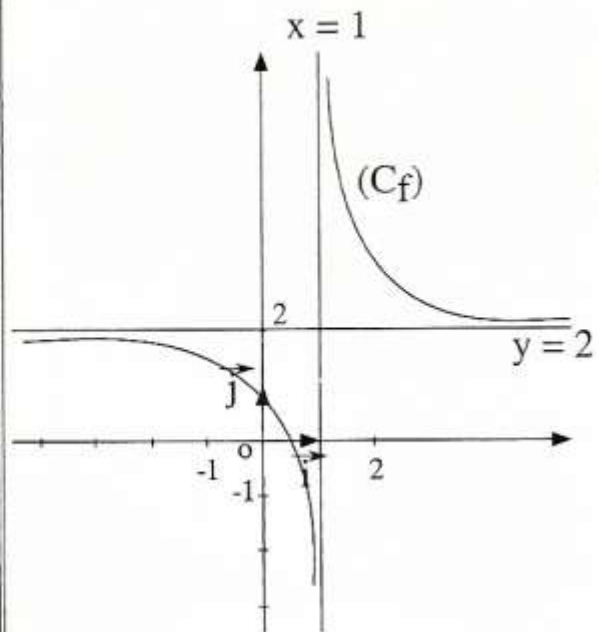
$$= \frac{-7(x-y)}{(x-2)(y-2)(x-y)}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-7}{(x-2)(y-2)} \quad \text{إذن}$$

في المجال $]2, +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases}$ إذن

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y - 2 > 0 \end{cases}$$



5 - من خلال منحنى الدالة f فإن جدول

التغيرات هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)			

تمرين 7 :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين بما يلي :

$$g(x) = \frac{-x+2}{x-1} \quad f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

1 - حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2 - اعط جدول تغيرات كل من f و g .

3 - حدد طبيعة كل من المنحنيين (C_f) و (C_g)

4 - أ - حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري

المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب - حدد نقط تقاطع (C_g) مع محوري المعلم

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{-1}{(x-1)(y-1)}$$

في المجال $]1, +\infty[$

إذن لدينا $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{-1}{(x-1)(y-1)} < 0$

وبالتالي g تناقصية على $]1, +\infty[$

في المجال $]1, +\infty[$

إذن لدينا $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{-1}{(x-1)(y-1)} < 0$

وبالتالي g تناقصية على $]1, +\infty[$

جدول تغيرات g هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)			

3 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$y = \frac{2(x-2)+7}{x-2}$$

يعني

يعني

$$(x-2)(y-2) > 0$$

$$\frac{-7}{(x-2)(y-2)} < 0$$

ومنه f تناقصية على $]2, +\infty[$

في المجال $]2, +\infty[$

إذن لدينا $\begin{cases} x < 2 \\ y < 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$$

إذن $(x-2)(y-2) > 0$

$$\frac{-7}{(x-2)(y-2)} < 0$$

إذن f تناقصية على $]2, +\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)			

تغيرات g :

ليكن x و y من Dg بحيث $x \neq y$

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \left(\frac{-x+2}{x-1} - \frac{-y+2}{y-1} \right) \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{(-x+2)(y-1) - (x-1)(-y+2)}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-xy + x + 2y - 2 + xy - 2x - y + 2}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-x+y}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-(x-y)}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

أو مباشرة (C_g) هذلول مركزه $\Omega(1, -\frac{1}{1})$

مقارباة $x=1$ أو $y=-1$

أ - 4 - نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

$$\frac{2x+3}{x-2} = 0 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 0$$

$$2x+3=0 \quad \text{يعني}$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{يعني}$$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في $I(-\frac{3}{2}, 0)$

(C_f) يقطع محور الأرتاب في : $J(0, f(0))$

$$\text{أي } J(0, -\frac{3}{2})$$

ب - نقط تقاطع (C_g) مع محور الأفاصيل

$$\frac{-x+2}{x-1} = 0 \quad \text{يعني} \quad g(x) = 0$$

$$-x+2=0 \quad \text{يعني}$$

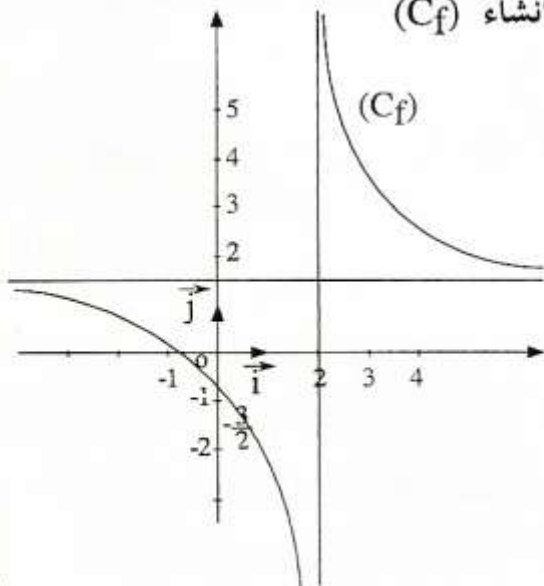
$$x = 2 \quad \text{يعني}$$

إذن (C_g) يقطع محور الأفاصيل في $I'(2, 0)$

(C_g) يقطع محور الأرتاب في $J'(0, g(0))$

$$\text{أي } J'(0, -2)$$

5 - انشاء (C_f)



$$y = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2} \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 + \frac{7}{x-2} \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = \frac{7}{x-2} \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

المعادلة تصبح $Y = \frac{7}{X}$ في المعلم $(A, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $A(2, 2)$

وبالتالي (C_f) هذلول مركزه A ومقارباة

$$\text{المستقيمان } x=2 \text{ و } y=2$$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $A(2, \frac{2}{1})$ ومقارباة

$$y=2 \text{ و } x=2$$

معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي

$$y = g(x)$$

$$y = \frac{-x+2}{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$y = \frac{-(x-1)+1}{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$y = \frac{-(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$y = -1 + \frac{1}{x-1} \quad \text{يعني}$$

$$y + 1 = \frac{1}{x-1} \quad \text{يعني}$$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(B, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $B(1, -1)$

إذن (C_g) هذلول مركزه $B(1, -1)$ ومقارباة

$$\text{المستقيمان } x=1 \text{ و } y=-1$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{\frac{2x+3}{x} - \frac{2y+3}{y}}{x - y} \\ &= \frac{2xy + 3y - 2xy - 3x}{xy} \times \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{-3(x - y)}{xy} \times \frac{1}{x - y}\end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-3}{xy} \quad \text{إذن}$$

لكل x و y من $]0, +\infty[$ لدينا $xy > 0$

$$\frac{-3}{xy} < 0 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي f تناقصية على $]0, +\infty[$

3 - أ - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = \frac{2x+3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$y = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 + \frac{3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$y - 2 = \frac{3}{x} \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$Y = \frac{3}{X} \quad \text{إذن معادلة تصبح}$$

في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(0, 2)$

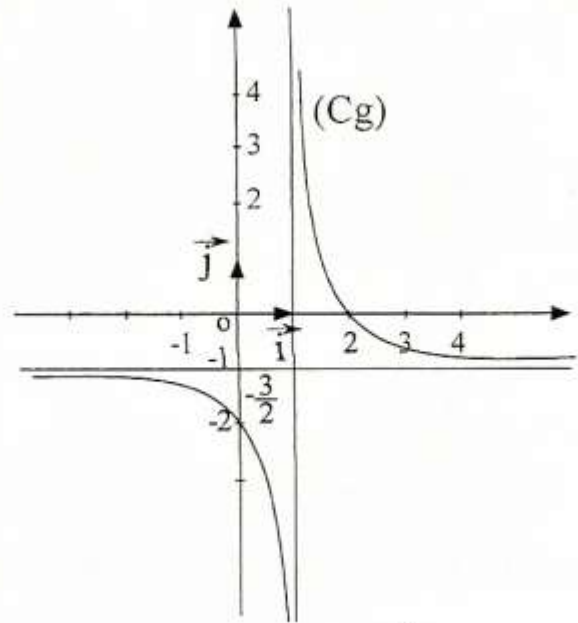
ب - المنحنى (C_f) هذلول مركزه Ω ومقارباه

المستقيمان $x = 0$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $\Omega(0, \frac{2}{1})$ ومقارباه

$$y = 2 \quad \text{و} \quad x = 0$$



تمارين 8 :

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة
بمايلي :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2 - أدرس تغيرات f على المجال $]0, +\infty[$

3 - ليكن $\Omega(1, 2)$ نقطة في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ - بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$Y = \frac{3}{X} \quad \text{هي}$$

ب - أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ يعني $x \neq 0$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{إذن}$$

2 - ليكن x و y من $]0, +\infty[$ بحيث $x \neq y$

الجواب :

$$x + 2 \neq 0 \quad \text{يعني} \quad x \in D_f - 1$$

$$x \neq -2 \quad \text{يعني}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

إذن

لدينا

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4}{x+2} &= \frac{2x+4-4}{x+2} \\ &= \frac{2x}{x+2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\text{ومنه} \quad f(x) = 2 - \frac{4}{x+2} \quad \text{لكل } x \text{ من } D_f$$

$$-2 \text{ ليكن } x \text{ و } y \text{ من }]-2, +\infty[\text{ بحيث}$$

$x \neq y$ لدينا :

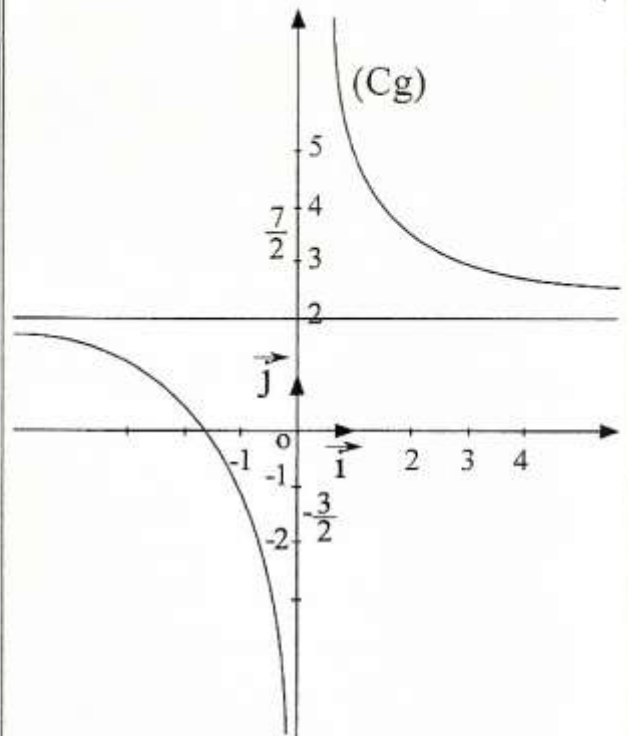
$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{2 - \frac{4}{x+2} - 2 + \frac{4}{y+2}}{x - y} \\ &= \frac{-4(y+2) + 4(x+2)}{(x+2)(y+2)} \\ &= \frac{-4y - 8 + 4x + 8}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{4(x - y)}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x - y} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{4}{(x+2)(y+2)} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \text{لدينا} \quad \begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases} \quad \text{إذن} \\ \begin{cases} x+2 > 0 \\ y+2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{ومنه} \quad (x+2)(y+2) > 0 \quad \text{إذن}$$

ب -



تمرين 9 :

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \frac{2x}{x+2} \quad \text{ب -}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد مجموعة التعريف D_f وتحقق أن لكل

$$x \text{ من } D_f : f(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$$

2 - أدرس تغيرات f على المجال $]-2, +\infty[$

3 - ليكن $\Omega = (-2, 2)$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ - بين أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{هي : } Y = -\frac{4}{X}$$

ب - أنشئ (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

تمرين 10:

لتكن الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x|x| - 2x + 2$$

1 - أ - بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا :

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1$$

ب - بين أن لكل x من $\mathbb{R}^-$ لدينا :

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

2 - أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد

وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - حل مبيانيا المعادلة : $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

4 - حل مبيانيا المعادلة : $1 \leq f(x) \leq 3$

الجواب :

1 - أ - ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ إذن : $|x| = x$

$$f(x) = x|x| - 2x + 2 \quad \text{لدينا}$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 1$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1 \quad \text{إذن}$$

ب - ليكن $x \in \mathbb{R}^-$ لدينا : $|x| = -x$

$$f(x) = x|x| - 2x + 2 \quad \text{لدينا}$$

$$= x(-x) - 2x + 2$$

$$= -x^2 - 2x - 1 + 3$$

$$f(x) = -(x + 1)^2 + 3 \quad \text{إذن}$$

2 - في $\mathbb{R}^+$ لدينا معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = (x - 1)^2 + 1 \quad \text{يعني}$$

$$y - 1 = (x - 1)^2 \quad \text{يعني}$$

$$\frac{4}{(x + 2)(y + 2)} > 0$$

ومنه f تزايدية قطعاً على $] -2, +\infty[$

3 - أ - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = 2 - \frac{4}{x + 2}$$

$$y - 2 = \frac{-4}{x + 2}$$

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

المعادلة تصبح $Y = -\frac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(2, 2)$

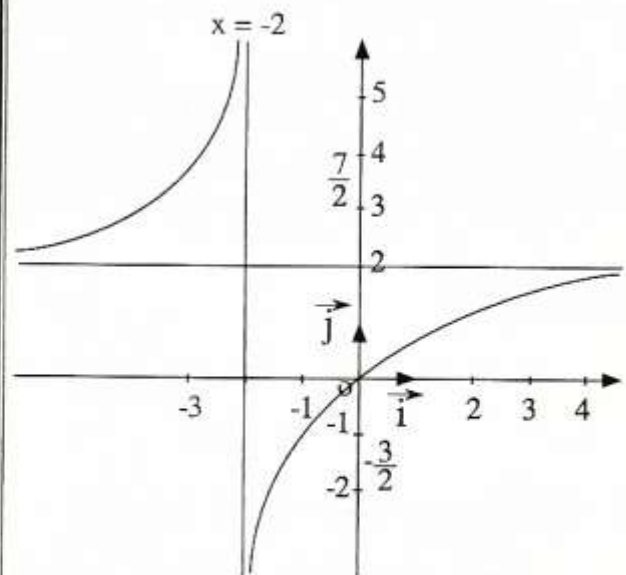
ب - (C_f) عبارة عن هذلول مركزه Ω

ومقارباه لمستقيمان $x = -2$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $\Omega(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ أي

$\Omega(-2, 2)$ ومقارباه $x = -2$ و $y = 2$



$f(x) = m - 3$ يعني x أفصول لنقطة تقاطع
(C_f) والمستقيم $y = m$

إذن عدد نقط تقاطع (C_f) والمستقيم
(D): $y = m$ هو عدد حلول المعادلة
 $f(x) = m$ هو :

إذا كان $m < 1$ أو $m > 3$ هناك حل وحيد
إذا كان $m = 1$ أو $m = 3$ هناك حلان مختلفان
إذا كان $1 < m < 3$ هناك ثلاثة حلول مختلفة.

4 - $1 \leq f(x) \leq 3$ يعني أن (C_f) محصور بين
المستقيمين $y = 1$ و $y = 3$
لنحل أولاً المعادلة $f(x) = 3$
في المجال $[0, +\infty[$

$$(x - 1)^2 + 1 = 3 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 3$$

$$(x - 1)^2 = 2 \quad \text{يعني}$$

$$x - 1 = -\sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x - 1 = \sqrt{2} \quad \text{يعني}$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{يعني}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{إذن}$$

في المجال $]-\infty, 0]$

$$x = -1 \quad \text{تكافئ} \quad f(x) = 3$$

$$f(x) = 1 \quad \text{لنحل المعادلة}$$

في المجال $[0, +\infty[$

$$x = 1 \quad \text{تكافئ} \quad f(x) = 1$$

في المجال $]-\infty, 0]$

$$(x + 1)^2 + 3 = 1 \quad \text{يعني} \quad f(x) = 1$$

$$-(x - 1)^2 = -2 \quad \text{يعني}$$

$$(x + 1)^2 = 2 \quad \text{يعني}$$

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

معادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم ($\Omega, \vec{i}, \vec{j}$)

حيث $\Omega(1, 1)$

في $\mathbb{R}^+$ إذن (C_f) جزء من الشلجم الذي

معادلته $Y = X^2$ في المعلم ($\Omega, \vec{i}, \vec{j}$)

في $\mathbb{R}^-$ لدينا معادلة (C_f) في المعلم ($O, \vec{i}, \vec{j}$)

هي : $y = f(x)$

$$y = -(x + 1)^2 + 3$$

$$y - 3 = -(x + 1)^2$$

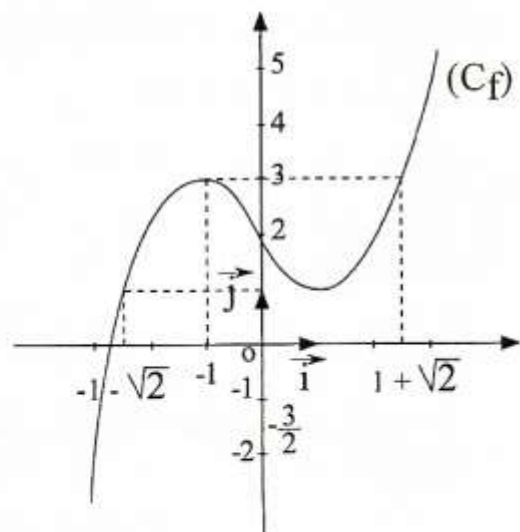
$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 3 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

معادلة (C_f) تصبح $Y = -X^2$ في المعلم

($\Omega', \vec{i}, \vec{j}$) حيث $\Omega'(-1, 3)$

إذن في $\mathbb{R}^-$ جزء من شلجم معادلته

$Y = -X^2$ في المعلم ($\Omega', \vec{i}, \vec{j}$)



$$m \in \mathbb{R} \quad \text{حيث } x - m|x| + m = 0$$

الجواب :

$$x - 1 \neq 0 \quad \text{يعني } x \in D_f - 1$$

$$x \neq 1 \quad \text{يعني}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{إذن}$$

2 - ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}}{x - y} \\ &= \frac{x(y-1) - y(x-1)}{(x-y)(x-1)(y-1)} \\ &= \frac{xy - x - yx + y}{(x-y)(x-1)(y-1)} \\ &= \frac{-(x-y)}{(x-y)(x-1)(y-1)} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-1}{(x-1)(y-1)} \quad \text{إذن}$$

3 - في المجال $]1, +\infty[$

$$\text{إذن} \quad \begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

$$(x-1)(y-1) > 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{-1}{(x-1)(y-1)} \leq 0 \quad \text{إذن}$$

وبالتالي f تناقصية على المجال $]1, +\infty[$

وبنفس الطريقة f تناقصية على $]-\infty, 1[$

جدول تغيرات f :

$$x + 1 = -\sqrt{2} \quad \text{يعني } x + 1 = \sqrt{2}$$

$$x = -1 - \sqrt{2} \quad \text{يعني } x = -1 + \sqrt{2}$$

$$x = -1 - \sqrt{2} \quad \text{إذن}$$

بالرجوع إلى البداية فإن :

$$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2} \quad 1 \leq f(x) \leq 3$$

$$S = [-(1 + \sqrt{2}) ; (1 + \sqrt{2})] \quad \text{إذن}$$

تمرين 11 :

نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

ومُنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد مجموعة تعريف f D_f .

2 - حدد معدل تغيرات f .

3 - اعط جدول تغيرات f .

4 - بين أن $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

5 - بين أن (C_f) هذلول حدد مركزه ومقاربه

6 - أنشئ المنحنى (C_f)

7 - لتكن g الدالة المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{x}{|x| - 1}$$

أ - حدد مجموعة تعريف الدالة g .

ب - بين أن g دالة فردية.

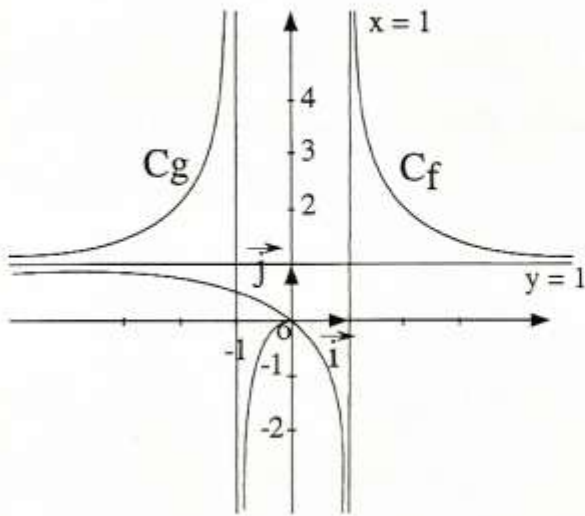
ج - بين أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$

د - استنتج طريقة لإنشاء (C_g) ثم أنشئ

(C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هـ - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة :

- 6



7 - لدينا $g(x) = \frac{x}{|x|-1}$
 $|x| - 1 \neq 0$ يعني $x \in Dg$

$|x| \neq 1$ يعني

$x \neq -1$ $x \neq 1$ يعني

$Dg = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ وبالتالي

ب - $x \in Dg$ يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$

يعني $-x \neq 1$ و $-x \neq -1$

يعني $-x \in Dg$

إذن لكل $x \in Dg$ لدينا $-x \in Dg$

لدينا

$$g(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = \frac{-x}{|x|-1}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

ومنه g دالة فردية.

ج - ليكن $x \in Dg$ بحيث $x \geq 0$

$$g(x) = \frac{x}{|x|-1} = \frac{x}{x-1} = f(x)$$

د - لدينا $g(x) = f(x)$ لكل

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)			

4 - ليكن $x \in Df$

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$$

إذن $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ لكل $x \in Df$

5 - معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي $y = f(x)$

يعني $y = 1 + \frac{1}{x-1}$

يعني $y - 1 = \frac{1}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

المعادلة (Cf) تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 1)$

ومنه (Cf) هذلول مركزه $\Omega(1, 1)$ ومقارباه

المستقيمان $x = 1$ و $y = 1$

طريقة 2 :

(Cf) هذلول مركزه $\Omega(\frac{1}{1}, \frac{1}{1})$ أي

$\Omega(1, 1)$ ومقارباه $x = 1$ و $y = 1$

4 - اعط جدول تغيرات الدالة f

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1}$$

a - أدرس زوجية الدالة g

b - أنشئ الدالة g في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c - اعط جدول تغيرات الدالة g.

الاجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x + 1 \neq 0$

يعني $x \neq -1$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

2 - لكل $x \in D_f$

$$-1 + \frac{4}{x+1} = \frac{-x-1+4}{x+1}$$

$$= \frac{-x+3}{x+1} = f(x)$$

وبالتالي $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ لكل $x \in D_f$

3 - a - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي $y = f(x)$

$$y = -1 + \frac{4}{x+1}$$

$$y + 1 = \frac{4}{x+1}$$

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

المعادلة تصبح $Y = \frac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $(-1, -1) \in \Omega$

b - (C_f) هذلول مركزه $(-1, -1)$

ومقارباة المستقيمان $x = -1$ و $y = -1$.

$$x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

إذن $(C_g) = (C_f)$ في $[0, 1[\cup]1, +\infty[$

وبما أن f فردية نتمم الرسم بإنشاء المماثل بالنسبة لأصل المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

هـ - $x - m|x| + m = 0$ يعني

$$x = m(|x| - 1)$$

$$(|x| \neq 1) \quad \frac{x}{|x| - 1} = m \quad \text{يعني}$$

$$g(x) = m \quad \text{يعني}$$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_g)

والمستقيم $y = m$

الحالة 1 : $m = 0$ هناك وحيد هو $x = 0$

الحالة 2 : $m < 0$ هناك حلين مختلفين.

الحالة 3 : $0 < m \leq 1$ ليس هناك حل.

الحالة 4 : $m > 1$ هناك حلان مختلفان.

تمرين 12 :

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{-x + 3}{x + 1}$$

(C) التمثيل المبياني لـ f في معلم متعامد

ومُنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2 - تحقق أن $f(x) = -1 + \frac{4}{x+1}$ لكل $x \in D_f$

3 - ليكن $(-1, -1) \in \Omega$ نقطة من (P).

a - بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$$Y = \frac{4}{X} \quad \text{هي}$$

b - أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$f(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = \frac{-x + 3}{x + 1} = f(x)$$

إذن (C_f) و (C_g) منطبقان على هذا المجال.

c - من خلال منحنى الدالة g فإن جدول

تغيرات g هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)		3	

تمرين 13:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{x-2}{x}$$

و (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد

ومُنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد D_f وتحقق أن لكل $x \in D_f$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

2 - ليكن $(0, -1) \cap \Omega$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي

$$Y = \frac{-2}{X}$$

3 - أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

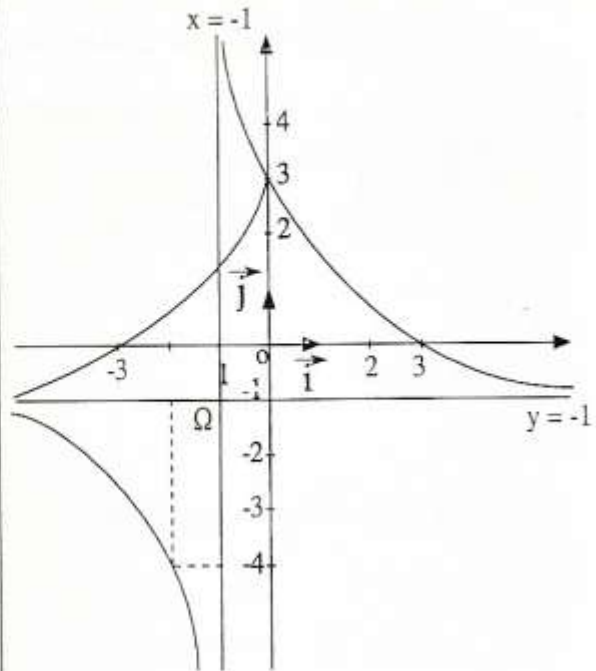
4 - اعط جدول تغيرات f .

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x}$$

أ - أدرس زوجية الدالة g

ب - أنشئ (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$



4 - جدول تغيرات f من خلال المنحنى فإن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)			

$$g(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} \quad \text{لدينا}$$

$$x \in D_g \quad \text{يعني} \quad |x| + 1 \neq 0$$

يعني $|x| \neq -1$ وهذا دائما صحيح

$$D_g = \mathbb{R} \quad \text{إذن}$$

$$\text{لكل } x \in D_g \quad \text{لدينا} \quad -x \in D_g$$

$$g(-x) = \frac{-|-x| + 3}{|-x| + 1} = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = g(x)$$

إذن g دالة زوجية.

b - لدينا g دالة زوجية إذن (C_g) يكون

متماثلا بالنسبة لمحور الأرتاب.

نشئ (C_g) أولا على $[0, +\infty[$ في هذا

المجال

4 - جدول تغيرات f

حسب منحنى f فإن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)			

5 - لدينا $g(x) = \frac{|x| - 2}{x}$

$x \in D_g$ يعني $x \neq 0$

ومنه $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

لكل $x \in D_g$ لدينا $-x \in D_g$

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x} = \frac{|-x| - 2}{-x} = \frac{|x| - 2}{-x} = -\frac{|x| - 2}{x} = -g(x)$$

إذن g دالة فردية.

ب - لدينا g دالة فردية إذن (Cg) متماثل

بالنسبة لأصل المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

في المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x} = \frac{x - 2}{x}$$

$g(x) = f(x)$

إذن (Cg) و (Cf) منطبقان في المجال $]0, +\infty[$

ثم نتمم الرسم بإنشاء المماثل بالنسبة لأصل

المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ج - جدول تغيرات g.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)			

مستعملا منحنى الدالة f.

ج - اعط جدول تغيرات g.

الجواب :

1 - لدينا $f(x) = \frac{x - 2}{x}$

$x \in D_f$ يعني $x \neq 0$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

لدينا كذلك $1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x} = f(x)$

ومنه $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$ لكل $x \in D_f$

2 - معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

$y = 1 - \frac{2}{x}$

يعني

$y - 1 = -\frac{2}{x}$

يعني

$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$

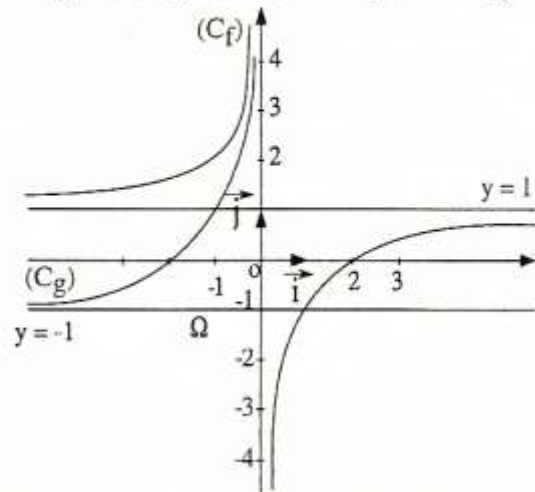
نضع

المعادلة تصبح $Y = -\frac{2}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega (0, -1)$.

3 - (Cf) عبارة عن هذلول مركزه $\Omega (0, -1)$

ومقارباة المستقيمان $x = 0$ و $y = 1$.



$$y = \frac{x}{x-1}$$

يعني

$$y = \frac{x-1+1}{x-1}$$

يعني

$$y = 1 + \frac{1}{x-1}$$

يعني

$$y - 1 = \frac{1}{x-1}$$

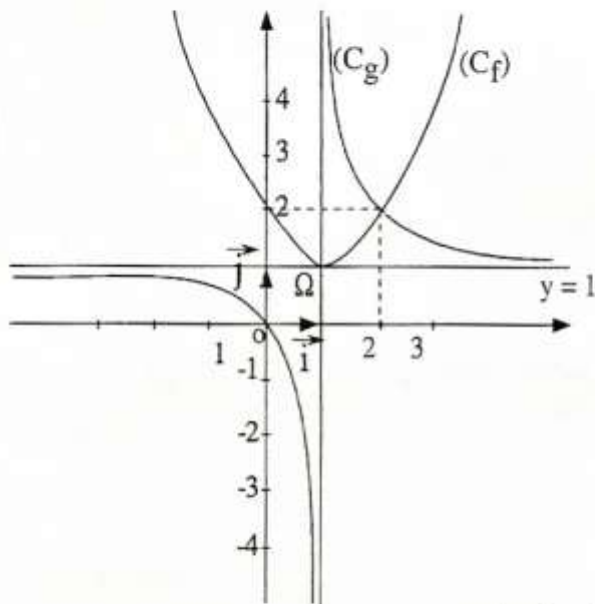
يعني

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

نضع

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - (C_f) شلجم رأسه $\Omega(1, 1)$ وموجه نحو الأعلى (C_g) هذلول مركزه $\Omega(1, 1)$ ومقارباة المستقيمان $x=1$ و $y=1$.



3 - لدينا

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x}$$

$$= x^2 - 2x + 2 - \frac{x}{x-1}$$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \text{يعني} \quad h(x) \geq 0$$

تمرين 14:

لتكن الدالة f و g المعرفين بما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x + 2$$

(C_g) و (C_f) هما المنحنيان الممثلان لـ g و f

المعلم المتعامد والممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega(1, 1)$ نقطة من (P)

1 - حدد معادلتين (C_g) و (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أنشئ (C_g) و (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - لتكن الدالة h المعرفة بما يلي :

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 + \frac{x}{1-x}$$

أدرس مبيانيا إشارة الدالة $h(x)$.

الجواب :

1 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

$$y = x^2 - 2x + 2$$

يعني

$$y = x^2 - 2x + 1 + 1$$

يعني

$$y - 1 = (x - 1)^2$$

يعني

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

نضع

معادلة (C_f) تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 1)$.

معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = g(x)$$

ب - أنشئ (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 ج - حل مبياناً المتراجحة $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$
 (α) هو حل المعادلة $g(x) = f(x)$ غير مطلوب
 تحديده).

الجواب :

1 - لدينا

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} = f(x)$$

$$x \in D_f \text{ لكل } f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$$

2 - أ - ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

لدينا :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\frac{x-2}{x-1} - \frac{y-2}{y-1}}{x - y}$$

$$= \frac{(x-2)(y-1) - (x-1)(y-2)}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$= \frac{xy - x - 2y + 2 - xy + 2x + y - 2}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$= \frac{x - y}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{1}{(x-1)(y-1)}$$

ب - في المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \text{ إذن}$$

$$(x-1)(y-1) > 0 \text{ ومنه}$$

$$f(x) \geq g(x)$$

يعني

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f)

فوق (C_g) .

إذن :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
h(x)	+	-	○	+

تمرين 15 :

نعتبر الدالة المعرفة بـ :

$$g(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

1 - تحقق أن :

$$x \in D_f \text{ لكل } f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$$

2 - أ - أحسب معدل تغيرات f .

ب - اعط جدول تغيرات f .

3 - أ - بين أن (C_f) هذلول محدد عناصره

المميزة.

ب - أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ومنظم

$(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - حل مبياناً المتراجحة $f(x) > 0$

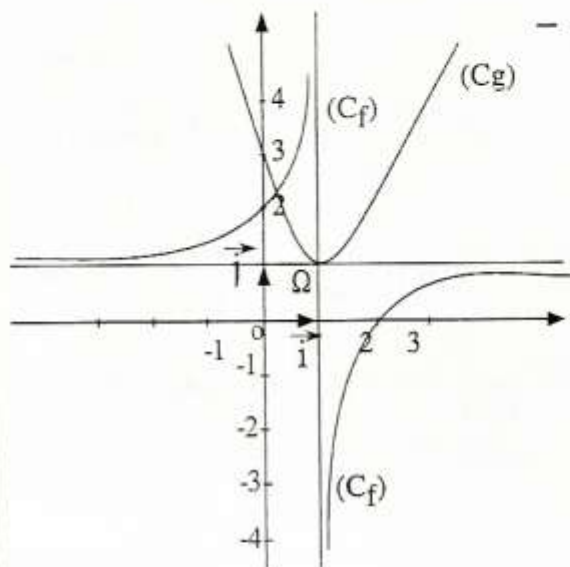
5 - نعتبر الدالة المعرفة بـ :

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

أ - بين أن (C_g) عبارة عن شلجم حدد عناصره

المميزة.

وبالتالي (C_f) هذلول مركزه Ω ومقارباة المستقيمان $x = 1$ و $y = 1$.



4 - $f(x) > 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاصل.

$$S =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

5 - أ - معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = x^2 - 2x + 3$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 2$

يعني $y = (x - 1)^2 - 2$

يعني $y - 2 = (x - 1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $(1, 1) \in \Omega'$.

إذن $\frac{1}{(x-1)(y-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]1, +\infty[$ في المجال $]1, -\infty[$ لدينا :

$$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$$

إذن $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$

إذن $(x - 1)(y - 1) > 0$

ومنه $\frac{1}{(x-1)(y-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]1, -\infty[$ جدول تغيرات f :

X	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)			

3 - أ - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = 1 - \frac{1}{x-1}$

يعني $y - 1 = -\frac{1}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{-1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $(1, 1) \in \Omega$.

3 - أثبت أن $Y = X^2$ و $Y = \frac{1}{X}$ هما معادلتان

ديكارتيان لـ (C) و (C') على التوالي في المعلم

$$\vec{O}\Omega = \vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{حيث } (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$$

4 - أنشئ (C) و (C')

5 - حل مبيانيا المتراجحة :

$$g(x) - f(x) \leq 0$$

6 - ناقش تبعا لقيم عدد حلول المعادلة :

$$(E) \quad x^2 - 2x + 3 - m = 0$$

7 - نعتبر الدالة h المعرفة بـ :

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$

أ - بين أن h دالة زوجية.

ب - بين أن لكل $x \leq 0$ $h(x) = f(x)$

ج - استنتج تغيرات الدالة h

الجواب :

1 - لدينا :

$$g(2) = 3 \quad f(2) = 3 \quad f(0) = 3$$

2 - التقاطع مع محور الأفاصيل

$$\frac{2x-1}{x-1} = 0 \quad \text{يعني} \quad g(x) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{يعني}$$

إذن (C') يقطع محور الأفاصيل في $A(\frac{1}{2}, 0)$

(C') يقطع محور الأرتيب في $B(0, g(0))$

أي $B(0, 1)$

3 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

إذن (Cg) شلجم رأسه Ω موجه نحو الأعلى

ومحور تماثله المستقيم $x = 1$

طريقة 2 :

(Cg) شلجم رأسه $\Omega(\frac{2}{2}, g(1))$ أي

$$\Omega(1, 1)$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} - 1 > 0 \quad \text{يعني} \quad \frac{g(x)}{f(x)} > 1$$

$$\frac{g(x) - f(x)}{f(x)} > 0 \quad \text{يعني}$$

جدول الإشارة

x	$-\infty$	α	1	2	$+\infty$
$g(x) - f(x)$	+	○	-	+	+
f(x)	+	+	-	+	+
$\frac{g(x) - f(x)}{f(x)}$	+	○	-	-	+

وبالتالي : $S =]-\infty, \alpha[\cup]2, +\infty[$

تمرين 16 :

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـ :

$$g(x) = \frac{2x-1}{x-1} \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x + 3$$

(C) و (C') منحنياهما على التوالي في معلم

متعامد ومُنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - أحسب $f(0)$; $f(2)$; $g(2)$

2 - حدد زوج احداثيتي كل من نقط تقاطع

(C') مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5 - $g(x) \leq f(x)$ يعني $g(x) - f(x) \leq 0$
 يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_g)
 تحت (C_f) .

ذن $S =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

- 6 $x^2 - 2x + 3 - m = 0$

يعني $x^2 - 2x + 3 = m$

يعني $f(x) = m$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f)

مع المستقيم الذي معادلته $y = m$.

إذا كان $m = 2$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m > 2$ هناك حلان مختلفان.

إذا كان $m < 2$ ليس هناك حل.

7 - لدينا :

$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$

أ - لدينا

$D_h = \mathbb{R}$

لكل $x \in D_h$ لدينا $-x \in D_h$

$h(-x) = (-x)^2 + 2|-x| + 3$

$= x^2 + 2|x| + 3$

$h(-x) = h(x)$

إذن h دالة زوجية

ب - لكل $x \leq 0$ لدينا $|x| = -x$

$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$

$= x^2 - 2x + 3$

إذن $h(x) = f(x)$ لكل $x \leq 0$

ج - جدول تغيرات h .

يعني $y = x^2 - 2x + 3$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 2$

يعني $y - 2 = (x - 1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 2)$ أي $\vec{O}\Omega = \vec{i} + 2\vec{j}$

- معادلة (C') في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = g(x)$

يعني $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

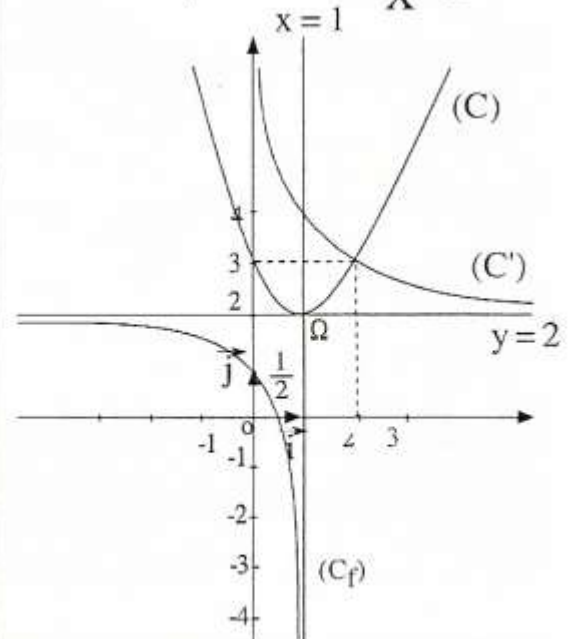
يعني $y = \frac{2(x - 1) + 1}{x - 1}$

يعني $y = 2 + \frac{1}{x - 1}$

يعني $y - 2 = \frac{1}{x - 1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$



$$f(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{(-x)^2 - 4}$$

$$= \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

إذن f دالة زوجية.

$$|x| = -x \quad x \in Df \cap \mathbb{R}^+ \quad \text{لكل}$$

$$g(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{x+2}$$

$$= \frac{x+2-3}{x+2}$$

$$g(x) = 1 - \frac{3}{x+2} \quad \text{إذن}$$

3 - أ - لنحدد طبيعة (Cf)

معادلة (Cg) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = g(x)$$

$$x \in Df \cap \mathbb{R}^+$$

$$y = 1 - \frac{3}{x+2}$$

يعني

$$y - 1 = -\frac{3}{x+2}$$

يعني

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

نضع

$$Y = \frac{-3}{X} \quad \text{معادلة } (Cg) \text{ في } Df \cap \mathbb{R}^+ \text{ تصبح}$$

إذن (Cg) جزء من هذلول مركزه $\Omega(-2, 1)$

ومقارباة $x = -2$ و $y = 1$.

لدينا $h = f$ في $]-\infty, 1]$ إذن f و h لهما نفس

التغيرات على $]-\infty, 0]$

إذن h تناقصية على $]-\infty, 0]$ وبما أنها زوجية

فإن h تزايدية على $[0, +\infty[$

تمرين 17:

لتكن الدالة f المعرفة بمائلي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 4}$$

1 - حدد Df مجموعة تعريف f ثم ادرس زوجية f

2 - نضع $g(x) = f(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}^+ \cap Df$

$$g(x) = 1 - \frac{3}{x+2} \quad \text{بين أن}$$

3 - أ - حدد طبيعة (Cf) وعناصره المميزة.

ب - أنشي (Cg) ثم استنتج (Cg) في نفس

المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة :

$$x^2(1-m) - 3|x| + 2(1+2m) = 0$$

وذلك حسب قيم x

الجواب :

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \text{يعني} \quad x \in Df - 1$$

$$x^2 \neq 4 \quad \text{يعني}$$

$$x^2 \neq 2 \quad \text{و} \quad x \neq -2$$

$$Dg = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \quad \text{ومنه}$$

لكل $x \in Df$ لدينا $-x \in Df$

والممنظم المنحنيان (C_g) و (C_f) حيث :

$$f(x) = 4x - x^2 \quad g(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$$

وحدد احداثيتي نقط تقاطعهما.

3 - استنتج التمثيل المبياني للدالة h المعرفة بما

يلي :

نضع

$$\begin{cases} h(x) = g(x) & x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ h(x) = f(x) & x \in]0, 2[\end{cases}$$

4 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $h(x) = m$

حيث $m \in \mathbb{R}$

الجواب :

1 - مجموعة تعرف المعادلة $D: \mathbb{R} - \{2\}$

$$4x - x^2 = 2 + \frac{2}{x-1} \quad \text{تكافئ}$$

$$4x - x^2 = \frac{2x - 2 + 2}{x-1} \quad \text{تكافئ}$$

$$x(4-x)(x-1) = 2x \quad \text{يعني}$$

$$x(4-x)(x-1) - 2x = 0 \quad \text{يعني}$$

$$x[(4-x)(x-1) - 2] = 0 \quad \text{يعني}$$

$$x[(4-x)(x-1) - 2] = 0 \quad \text{يعني}$$

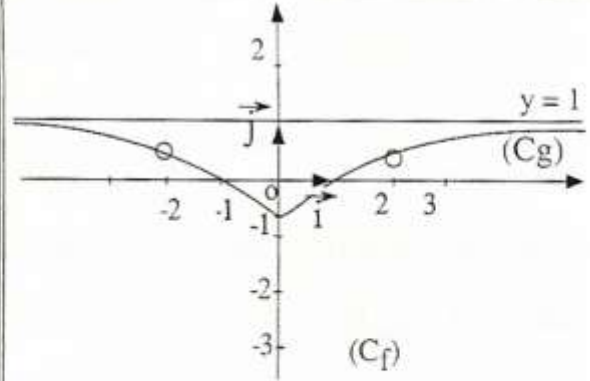
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad (4-x)(x-1) - 2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad 4x - 4 - x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad -x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \quad \text{بالنسبة للمعادلة}$$

$$\Delta = 25 - 4(-1) \times (-6) = 1 \quad \text{لدينا}$$



- 4

$$x^2(1-m) - 3|x| + 2(1+2m) = 0$$

$$x^2 - mx^2 - 3|x| + 2 + 4m = 0$$

$$x^2 - 3|x| + 2 = m(x^2 - 4) \quad \text{يعني}$$

$$(|x| \neq 2) \quad \text{و} \quad \frac{x^2 - 3|x| + 2}{(x)^2 - 4} = m$$

$$f(x) = m$$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f)

والمستقيم $y = m$

إذا كان $m = -\frac{1}{2}$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m < -\frac{1}{2}$ ليس هناك حل.

إذا كان $m = \frac{1}{4}$ ليس هناك حل.

إذا كان $-\frac{1}{2} < m < 1$ و $m \neq -\frac{1}{4}$ هناك

حليين مختلفين

إذا كان $m \geq 1$ ليس هناك حل.

تمرين 18 :

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$4x - x^2 = 2 + \frac{1}{x-1}$$

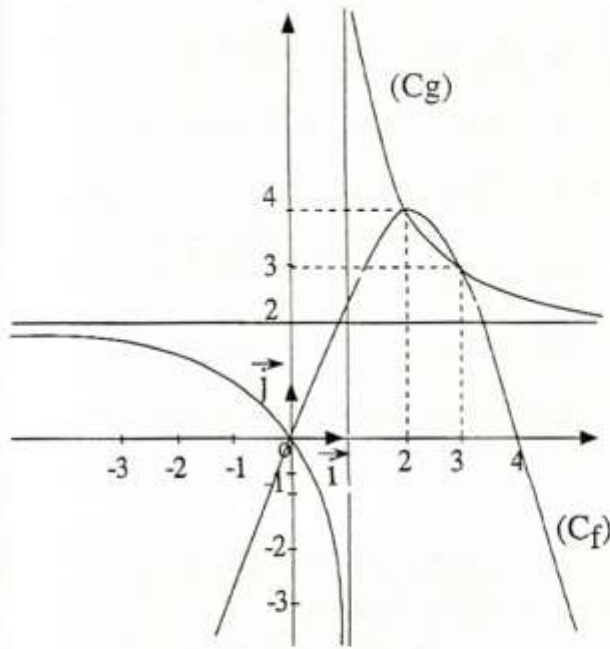
2 - أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المتعامد

إذن :

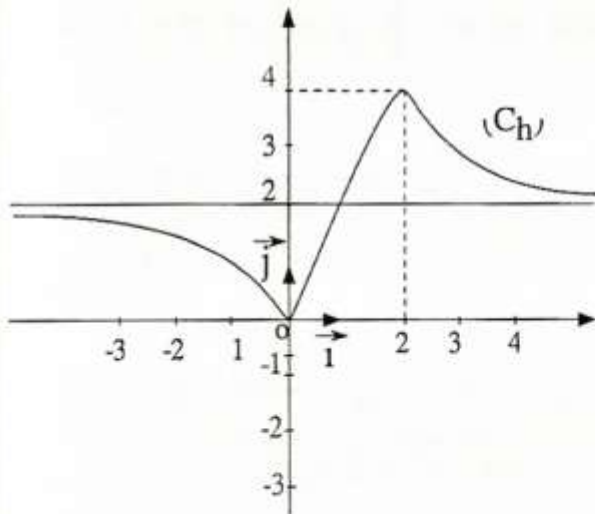
- إذا كان $m = 2$ و $m = 4$ أو $m = 0$ هناك حل وحيد.

- إذا كان $m > 4$ أو $m < 0$ فإن $S = \emptyset$

- إذا كان $0 < m < 2$ أو $2 < m < 4$ هناك حلان مختلفان



- 3



$$x = \frac{-5-1}{-2} = 3 \text{ أو } x = \frac{-5+1}{-2} = 2 \text{ إذن}$$

$$S = \{0, 2, 3\} \text{ إذن}$$

2 - معادلة (Cg) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 2 + \frac{2}{x-1}$$

يعني

$$y - 2 = -\frac{2}{x-1}$$

يعني

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

نضع

المعادلة تصبح $Y = \frac{2}{X}$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 2)$ إذن (Cf) هذلول مركزه

$$y = 2 \text{ و } x = 1 \text{ ومقارباة } \Omega(1, 2)$$

معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

$$y = 4x - x^2$$

يعني

$$y = -(x^2 - 4x)$$

يعني

$$y = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

يعني

$$y = -(x - 2)^2 + 4$$

يعني

$$y - 4 = -(x - 2)^2$$

يعني

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 4 \end{cases}$$

نضع

المعادلة تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega'(2, 4)$.

4 - لدينا $h(x) = m$ يعني x أفصول نقطة تقاطع

(Ch) مع المستقيم الذي معادلته

$$(\Delta) y = m$$