

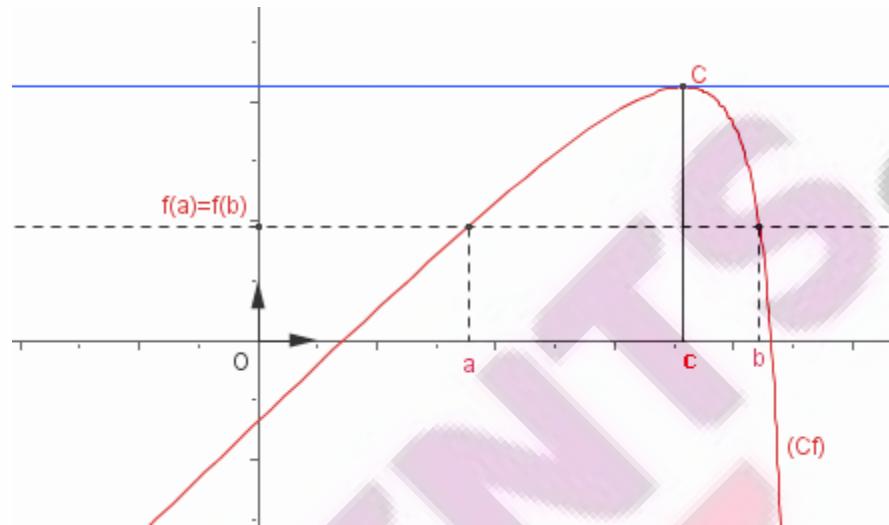
مبرهنة التزايدات المئوية

I

1- مبرهنة رول

تذكير: اذا كان لدالة f مطraf نسبي في c و كانت f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c) = 0$

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و قابلة للاشتقاق على $(a; b)$ بحيث



الشكل جانبه يؤول هندسيا هذه الشروط:

يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C من المنحنى (C_f) أقصولها ينتمي إلى $[a; b]$ بحيث المماس

لـ (C_f) في C يوازي محور الأفاسيل أي يوجد c من $[a; b]$ بحيث $f'(c) = 0$

نبرهن هذا

* إذا كانت f ثابتة فان $f'(c) = 0 \quad \forall c \in [a; b]$

- * دالة غير ثابتة ومنه يوجد $x_0 \in [a; b]$ حيث $f(x_0) > f(a) = f(b)$ أو $f(x_0) < f(a) = f(b)$

بما أن f متصلة على $[a; b]$ فان f تقبل قيمة قصوى M و قيمة دنيا m

لدينا $M \neq f(a) = f(b)$ لأن إذا كان غير ذلك فان f ستكون ثابتة
إذا كان $M \neq f(a) = f(b)$ فإنه يوجد c من $[a; b]$ حيث $f(c) = M$

أي أن f تقبل قيمة قصوى عند c وحيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c) = 0$

إذا كان $m \neq f(a) = f(b)$ فإنه يوجد c من $[a; b]$ حيث $f(c) = m$

أي أن f تقبل قيمة دنيا عند c وحيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c) = 0$

مبرهنة رول

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a; b]$ تحقق الشروط التالية:

-1 f متصلة على $[a; b]$

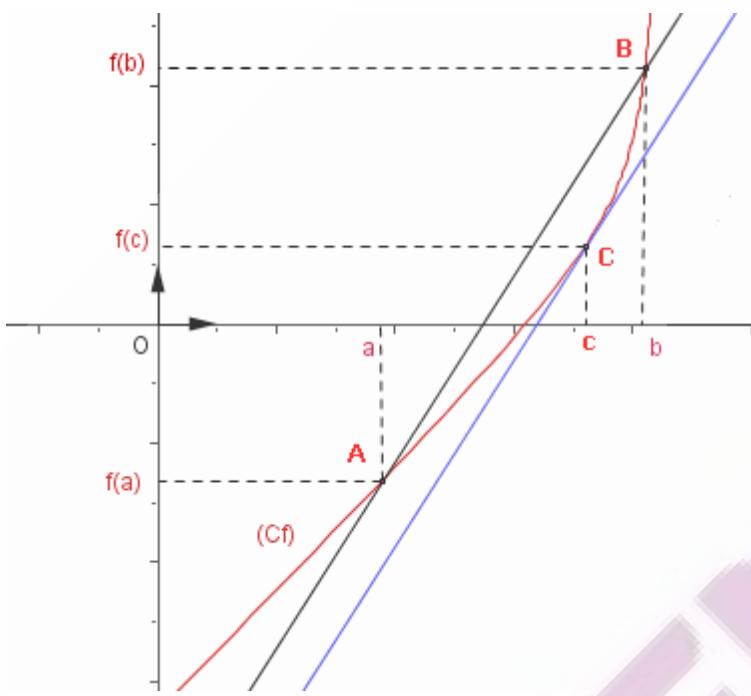
-2 f قابلة للاشتقاق على $(a; b)$

-3 $f(a) = f(b)$

فانه يوجد عنصر c من $[a; b]$ حيث $f'(c) = 0$

ملاحظات

- ❖ وجود c من $[a; b]$ حيث $f'(c) = 0$ لا يستثنى وجود نقط آخرى k حيث $f'(k) \neq 0$
- ❖ لتطبيق مبرهنة رول الشروط الثلاث ضرورية
- ❖ معطيات مبرهنة رول شروط كافية، لكنها غير لازمة

**2- مبرهنة التزايدات المتنعمة**

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ وقابلة للاشتاقاق على $[a; b]$.
الشكل جانبه يؤول هندسيا الشرطين:
يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C من المنحنى (C_f) أقصولها ينتمي إلى $[a; b]$ بحيث المماس لـ (C_f) في C يوازي (AB) أي أن معامليهما الموجهين متساوين
 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ يوجد c من $[a; b]$ بحيث

لبرهن هذا

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right]$$

لدينا إذن g دالة متصلة على $[a; b]$ وقابلة للاشتاقاق على $[a; b]$ لدينا $g(a) = g(b) = 0$

اذن حسب مبرهنة رول يوجد عنصر c من $[a; b]$ حيث $g'(c) = 0$

$$\forall x \in [a; b] \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{و منه}$$

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a; b]$ تحقق الشرطين التاليين:

-1 f متصلة على $[a; b]$

-2 f قابلة للاشتاقاق على $[a; b]$

فانه يوجد عنصر c من $[a; b]$ حيث $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$

ملاحظات

وجود c من $[a; b]$ حيث $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$ لا يستثنى وجود نقط آخرى k حيث $(b - a)f'(k) = f(b) - f(a)$

تمرين

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

- استنتج أن $x \leq \sin x$

لتكن f و g دالتي معرفتين على المجال $I = [x_0; +\infty]$ و قابلتين للاشتراق على I حيث $f'(x) \geq g'(x)$ و $f(x_0) = g(x_0)$ على I لكل x من I نعتبر $h = f - g$ على I بتطبيق مبرهنة التزايدات المتهية على h في المجال $[x_0; x]$ حيث $x \in I$ بين أن $f(x) \geq g(x)$ لكل x من I

الجواب

لدينا g متصلة على $[x_0; x]$ وقابلة للاشتراق على $[x_0; x]$ لكل x من I ومنه يوجد عنصر c من $[x_0; x]$ حيث $(x - x_0)h'(c) = h(x) - h(x_0)$ أي $(x - x_0)h'(c) = h(x) - h(x_0)$ أي $(x - x_0)h'(c) = h(x) - h(x_0)$ و بما أن $h'(c) \geq 0$ فان $h'(c) = f'(c) - g'(c) \geq 0$ أي $f'(c) \geq g'(c)$ لكل x من I ومنه $h(x) \geq 0$ لكل x من I اذن $f(x) \geq g(x)$ لكل x من I

لتكن f و g دالتي معرفتين على المجال $I = [x_0; +\infty]$ و قابلتين للاشتراق على I

إذا كان $f(x_0) = g(x_0)$ فان $f'(x) \geq g'(x)$ لكل x من I

ملاحظة: يمكن تعويض المجال I بـ $[x_0; a]$ أو $[a; x_0]$ أو $[x_0; a]$ و الخاصية تبقى صالحة

تمرين

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

تمرين

$$u_n = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{2^2} + \frac{\frac{1}{3}}{3^2} + \dots + \frac{\frac{1}{3}}{n^2}$$

نعتبر المتتالية u_n متقاربة.