www.students.ma

الحسابيات

تذكير :

- مبرهنة

ليكن a من $\mathbb{Z}$ و b في $\mathbb{N}^*$ حيث $a \neq b$
يوجد زوج وحيد $(q;r)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ حيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r \prec b$

- خاصيات

* ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$

$$a\wedge b = b\wedge a \qquad (a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c) \qquad a\wedge a = |a|$$

$$a\wedge b = \delta \Rightarrow ca\wedge cb = |c|\delta$$

$$a\vee b = b\vee a \qquad (a\vee b)|c| = ac\vee bc \qquad a\wedge a = |a|$$

$$b/a \Leftrightarrow a\vee b = |a|$$

$$a\wedge b = 1 \Leftrightarrow a\vee b = |ab|$$

* ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b $\quad a\wedge b = r\wedge b$

-* ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a\vee b = m$ كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $\delta = a\wedge b$
يوجد عددان u و v من $\mathbb{Z}$ حيث $\delta = au + bv$

- مبرهنة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a\vee b = m$ و $a\wedge b = \delta$
$m\delta = |ab|$

- مبرهنة

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$
إذا كان n غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2 \leq n$

- خاصيات

-* إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء
-* لتكن p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية موجبة و p عددا أوليا

$$p / p_1\times p_2\times\ldots\ldots\times p_n \Rightarrow \exists i\in\{1;2;\ldots.;n\} \quad p = p_i$$

- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ1 و -1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل
$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و α_1
و α_2 ......و α_n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon = \pm 1$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\beta_k}$
وحيث p_1 و p_2 ......و p_n أعداد أولية

* القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد $\delta = p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\lambda_k}$
حيث $\lambda_i = \inf(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;\ldots.;k\}$

* المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو العدد $m = p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\ldots\times p_k^{\lambda_k}$
حيث $\lambda_i = \sup(\alpha_i;\beta_i)$ و i تنتمي $\{1;2;\ldots.;k\}$

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

I- الموافقة بترديدn

1- تعريف

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$
نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $a \equiv b \quad [n]$ إذا كان n يقسم $a-b$

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n/a-b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a-b=kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n"

أ- $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" انعاكسية

ب- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \quad [n] \Rightarrow b \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" تماثلية

ج- $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \quad (a \equiv b \quad [n]) et (b \equiv c \quad [n]) \Rightarrow a \equiv c \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" متعدية

نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n" علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$
$a \equiv b \quad [n]$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n

البرهان

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$ بحيث $a = nq_1 + r_1$ و $b = nq_2 + r_2$ مع $0 \le r_1 \prec n$ و $0 \le r_2 \prec n$

❖ إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n أي $r_1 = r_2$ فان $a-b = n(q_1 - q_2)$
أي أن $a \equiv b \quad [n]$

❖ عكسيا إذا كان $a \equiv b \quad [n]$ فانه يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث $a-b=nk$
و منه $r_1 - r_2 = (k - q_1 - q_2)n$ أي n يقسم $r_1 - r_2$
و لدينا $0 \le r_1 \prec n$ و $0 \le r_2 \prec n$ ومنه $|r_1 - r_2| \prec n$
و بالتالي $r_1 - r_2 = 0$ أي $r_1 = r_2$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* - $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists (q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad a = nq + r \quad et \quad 0 \le r \prec n$

- $\forall (a;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad a \equiv r \quad [n] \quad et \quad r \in \{0;1;.....;n-1\}$

- المجموعة $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \quad [n]\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r في القسمة الاقليدية على n نرمز لها بـ $\overline{r}$

المجموعة $\overline{r}$ تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد n"في $\mathbb{Z}$

- $x \in \overline{r} \Leftrightarrow x \equiv r \quad [n]$

* - $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;....;n-1\} / \quad a \equiv r \quad [n]$ أي $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0;1;....;n-1\} / \quad \overline{a} = \overline{r}$

* - إذا كان $\overline{r} = \overline{r'}$ و $0 \le r \prec n$ و $0 \le r' \prec n$ فان $r = r'$

* - $\forall (x;n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \{0;1;..;n-1\} / \quad x \in \overline{r}$ (r باقي القسمة الاقليدية على n)

اذن $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup .... \cup \overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\overline{0}; \overline{1}; .....; \overline{n-1}\}$ برمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}\}$ حيث $\overline{0} = 2 \cdot \mathbb{Z}$ و $\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$

* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}; \overline{5}; \overline{6}\}$ حيث $\overline{0} = 7 \cdot \mathbb{Z}$ و $\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$

و $\overline{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k+2 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$ و $\overline{3} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k+3 \quad (k \in \mathbb{Z})\}$

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

و ....و$\overline{6}=\{x\in\mathbb{Z}/x=7k+6 \quad (k\in\mathbb{Z})\}$

في $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ لدينا $\overline{532}=\overline{4}$ لأن $532\equiv 4 \quad [7]$

$\overline{-36}=\overline{6}$ لأن $-36\equiv 6 \quad [7]$

4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد n" مع الجمع والضرب

أ- خاصية

ليكن x وy وz وt من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}$

إذا كان $x\equiv y \quad [n]$ و $z\equiv t \quad [n]$ فان $x+z\equiv y+t \quad [n]$

إذا كان $x\equiv y \quad [n]$ و $z\equiv t \quad [n]$ فان $x\times z\equiv y\times t \quad [n]$

نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

*- إذا كانت $x\in\overline{r}$ و $x'\in\overline{r'}$ فان $x+x'\in\overline{r+r'}$ و $x\times x'\in\overline{r\times r'}$ نكتب $\overline{r+r'}=\overline{r}+\overline{r'}$ و $\overline{r\times r'}=\overline{r}\times\overline{r'}$

*- $\forall(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \quad \forall(p;n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N} \quad a\equiv b \quad [n]\Rightarrow a^p\equiv b^p \quad [n]$

أمثلة

* في $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ $\quad \overline{3}+\overline{4}=\overline{7}=\overline{2}$, $\overline{0}+\overline{1}+\overline{2}+\overline{3}+\overline{4}=\overline{10}=\overline{0}$, $\overline{3}\times\overline{4}=\overline{12}=\overline{2}$

تمرين

حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية x حيث في $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ $\quad \overline{x}+\overline{5}=\overline{2}$

تمرين

1- أعط جدول الجمع ثم الضرب في $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$

2- بين أن العدد $2^{70}+3^{70}$ قابلة للقسمة على 13

تمرين

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad n(n^4-1)\equiv 0 \quad [n]$

2- بين أن 17 يقسم $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

3- ليكن n من $\mathbb{N}$ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد $1^n+2^n+3^n+4^n$ على4

II- الأعداد الأولية فيما بينها

1- تعريف

a و b من $\mathbb{Z}^*$

نقول a و b أوليان فيما بينهما إذا كان $a\wedge b=1$

2- مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

اذا كان $a\wedge b=1$ فانه $au+bv=1 \quad \exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2/$

عكسيا: ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ حيث $au+bv=1 \quad \exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2/$

ومنه كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 1 و بالتالي $D_a\cap D_b=\{-1;1\}$ أي $a\wedge b=1$

مبرهنة Bezout

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$

$a\wedge b=1\Leftrightarrow\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2/ \quad au+bv=1$

3- نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و d قاسم مشترك لـ a و b

$$a\wedge b=|d|\Leftrightarrow\frac{a}{|d|}\wedge\frac{b}{|d|}=1$$

ملاحظة

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

اذا كان a و b من $\mathbb{Z}^*$ و $a\wedge b=\delta$ فان يوجد p و q من $\mathbb{Z}^*$
حيث $b=q\delta$; $a=\delta p$; $p\wedge q=1$

4- مبرهنة كوص Théorème de GAUSS

أ- مبرهنة

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$
إذا كان c يقسم الجداء ab و كان $a\wedge c=1$ فان c يقسم b

البرهان

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ حيث c/ab و $a\wedge c=1$
ومنه $ab=kc$; $au+cv=1$ $\exists(u;v;k)\in\mathbb{Z}/$
و بالتالي $b=b\times 1=b(au+cv)=bau+bcv=kcu+bcv=c(ku+bv)$
اذن c يقسم b

ب- استنتاجات

a - مبرهنة

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$
$a\wedge b=1 \quad et \quad a/c \quad et \quad b/c\Rightarrow ab/c$

مثال يكون x قابل للقسمة على 6 اذا كان قابل للقسمة على 2 و 3

ملاحظة

الشرط $a\wedge b=1$ ضروري
مثال 36 يقبل القسمة على 4 و 2 و 6 ،و لا يقبل القسمة على $6\times 4=24$

b- مبرهنة

ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} ab\equiv ac \quad [n] \\ a\wedge n=1 \end{cases}\Rightarrow b\equiv c \quad [n]$$

البرهان

$$ab\equiv ac \quad [n]\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad ab-ac=kn$$
$$\Leftrightarrow n/a(b-c)$$

و حيث أن $a\wedge n=1$ فان $n/(b-c)$ اذن $b\equiv c \quad [n]$

5- خاصيات

*- ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ $\quad \begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases}\Leftrightarrow a\wedge bc=1$

*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$ $\quad a\wedge b=1\Leftrightarrow a\wedge b^n=1$

*- ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n و m من $\mathbb{N}^*$ $\quad a\wedge b=1\Leftrightarrow a^m\wedge b^n=1$

نتيجة

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$
إذا كان $a\wedge b=1$ فان $x=au+bv$ $\quad \forall x\in\mathbb{Z} \quad \exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$

تمرين محلول

تمرين حدد الأعداد الصحيحة النسبية حيث $17x+3y=94$

الحل

الطريقة1

لدينا $17\times 2+3\times 20=94$ و $17x+3y=94$ ومنه $17(x-2)+3(y-20)=0$

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

أي $-17(x-2)=3(y-20)$

ومنه $3/17(x-2)$ و حيث أن $17\wedge 3=1$ فان $3/(x-2)$ أي $x-2=3k \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي $x=3k+2 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

ومنه $17(3k+2)+3y=94 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$ و بالتالي $y=-17k+20 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\{(3k+2;-17k+20)/k\in\mathbb{Z}\}$

الطريقة2

$$\begin{aligned}17x+3y=94 &\Leftrightarrow 17x-94=3y\\ &\Leftrightarrow 17x\equiv 94 \quad [3]\\ &\Leftrightarrow 2x\equiv 1 \quad [3]\\ &\Leftrightarrow -x\equiv 1 \quad [3]\\ &\Leftrightarrow -x\equiv -(-1) \quad [3]\end{aligned}$$

بما أن $-1\wedge 3=1$ فان $[3] \quad x=-1$ ومنه $x=3k-1 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

و بالتالي $y=17k+37 \quad \exists k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\{(3k-1;17k+37)/k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين

حدد الأعداد q و u_0 من المجموعة $\mathbb{N}^*$ بحيث $u_0\wedge q=1$ و الأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 حدود المتتالية الهندسية التي أساسها q و تحقق $u_1+2u_3=44u_0^2$

تمرين

بين إذا كان $a\wedge b=1$ فان $(a+b)\wedge b=1$ و $(a+b)\wedge ab=1$

استنتج أن $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابلة للاختزال

تمرين

بين أن العدد $\sqrt{\frac{2}{3}}$ عدد لاجدري

6- مبرهنة فيرماFERMAT

نشاط

ليكن p عددا أوليا

1- بين أن p يقسم C_p^k مهما كان k حيث $1\le k\le p-1$

2- استنتج أن $p|\left[(n+1)^p-(n^p+1)\right] \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3- أ/ بين بالترجع أن $[p] \quad n^p\equiv n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب/ استنتج أن $[p] \quad n^{p-1}\equiv 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ بحيث $p\wedge n=1$

4- استنتج أن $[p] \quad a^p\equiv a \quad \forall a\in\mathbb{Z}$ و أن $[p] \quad a^{p-1}\equiv 1 \quad \forall a\in\mathbb{Z}$ بحيث $p\wedge a=1$

الجواب

1- بين أن p يقسم C_p^k

لدينا $C_p^k=\frac{p!}{k!(p-k)!} \Rightarrow k!C_p^k=p(p-1)(p-2)......(p-k+1)$

أي p يقسم $k!C_p^k$ و بما أن $k\prec p$ فان عوامل الجداء $k!$ أصغر من p ومنه $p\wedge k!=1$

و حسب مبرهنة كوص فان p يقسم C_p^k

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

www.students.ma

2- نستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad p\mid\left[(n+1)^p-\left(n^p+1\right)\right]$

حسب الصيغة الحدانية لدينا $(n+1)^p=\sum_{i=0}^{p}C_n^i n^i$ أي $(n+1)^p=1+n^p+\sum_{i=1}^{p-1}C_n^i n^i$

ومنه $(n+1)^p-\left(1+n^p\right)=\sum_{i=1}^{p-1}C_n^i n^i$

و حسب السؤال الاول p يقسم C_p^i $1\le i\prec p$ اذن p يقسم $\sum_{i=1}^{p-1}C_n^i n^i$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad p\mid\left[(n+1)^p-\left(n^p+1\right)\right]$

3- نبين بالترجع أن $[p]\quad n^p\equiv n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $[p]\quad o^p\equiv o$

نفترض أن $[p]\quad n^p\equiv n$ و نبين أن $[p]\quad (n+1)^p\equiv n+1$

لدينا $[p]\quad n^p+1\equiv n+1 \quad\Rightarrow\quad [p]\quad n^p\equiv n$

و حيث أن $p\mid\left[(n+1)^p-\left(n^p+1\right)\right]\quad \forall n\in\mathbb{N}$ فان $[p]\quad (n+1)^p\equiv n^p+1$

و منه $[p]\quad (n+1)^p\equiv n+1$

إذن $[p]\quad n^p\equiv n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب/ نستنتج أن $[p]\quad n^{p-1}\equiv 1\quad \forall n\in\mathbb{N}$ بحيث $p\wedge n=1$

لدينا $[p]\quad n^p\equiv n$ و $p\wedge n=1$ إذن $[p]\quad n^{p-1}\equiv 1$

حسب الخاصية التي تقول $\begin{cases}ab\equiv ac\quad [n]\\ a\wedge n=1\end{cases}\Rightarrow b\equiv c\quad [n]$

4- نستنتج أن $[p]\quad a^p\equiv a\quad \forall a\in\mathbb{Z}$ و أن $[p]\quad a^{p-1}\equiv 1\quad \forall a\in\mathbb{Z}$ بحيث $p\wedge a=1$

ليكن $a\in\mathbb{Z}$

اذا كان $a\in\mathbb{N}$ فالنتيجة تم برهنتها سابقا

اذا كان $a\prec 0$ فان $-a\succ 0$

من أجل $p=2$ لدينا $a^2-a=a(a-1)$ ومنه 2 يقسم a^2-a لان جداء عددين متتاليين زوجي

اذا كان $p\succ 2$ فان p فردي

$[p]\quad (-a)^p\equiv -a$ أي $[p]\quad -\left(a^p\right)\equiv -a$ ومنه $[p]\quad a^p\equiv a$

اذن $[p]\quad a^p\equiv a\quad \forall a\in\mathbb{Z}$

لدينا $[p]\quad a^p\equiv a$ و $p\wedge a=1 \Rightarrow [p]\quad a^{p-1}\equiv 1$

خاصية

ليكن p عددا أوليا

$$[p]\quad a^p\equiv a\quad \forall a\in\mathbb{Z}$$

مبرهنة فيرما

ليكن p عددا أوليا

$$[p]\quad a^{p-1}\equiv 1\quad \forall a\in\mathbb{Z}\ \text{بحيث}\ p\wedge a=1$$

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

7- الأعداد الأولية فيما بينها في مجموعها

تعريف

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو 1

ملاحظة

عندما نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها هذا لا يعني أولية فيما بينها مثنى مثنى

مبرهنة

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3......وa_n من $\mathbb{Z}^*$ أولية فيما بينها في مجموعها إذا وفقط وجدت أعداد u_1 و u_2 و u_3......وu_n من $\mathbb{Z}^*$ حيث $\sum_{i=1}^{n} u_1 a_i = 1$

حل المعادلة $ax+by=c$ $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

أ- مثال

نحل في $\mathbb{Z}^2$ $1075x+64y=9$

نطبق خوارزمية اقليدس لتحديد $1075\wedge 64$

$$1075 = 64\times 16+51$$
$$64=51\times 1+13$$
$$51=13\times 3+12$$
$$13=12\times 1+1$$
$$12=12\times 1+0$$

ومنه $1075\wedge 64=1$

ومنه يوجد $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث $1075x+64y=9$

لنضع $a=1075$ $b=64$

من خوارزمية اقليدس نستنتج أن

$$51=a-16b$$
$$13=b-(a-16b)$$
$$12=a-16b-3(b-(a-16b))$$
$$1=b-(a-16b)-(a-16b-3(b-(a-16b)))$$
$$1=-5a+84b$$

و منه $9=-45a+756b$ أي $9=-45\times 1075+756\times 64$

و منه $(-45;756)$ حل للمعادلة $1075x+64y=9$ و بالتالي $1075(x+45)+64(y-756)=0$

و بالتالي $64/1075(x+45)$ و حيث أن $1075\wedge 64=1$ فان $64/(x+45)$

إذن $\exists k\in\mathbb{Z}$ $x+45=64k$ أي $\exists k\in\mathbb{Z}$ $x=64k-45$ و منه $\exists k\in\mathbb{Z}$ $y=1075k+756$

عكسيا إذا كان $x=64k-45$; $y=1075k+756$ فانهما يحققان المعادلة $1075x+64y=9$

إذن $S=\{(64k-45;1075k+756)/k\in\mathbb{Z}\}$

ب – الحالة العامة

نعتبر المعادلة $ax+by=c$ $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ (E) حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$

نضع $\delta=a\wedge b$ ومنه $a'\wedge b'=1$ $\exists(a';b')\in\mathbb{Z}^{*2}/\quad a=\delta a'\quad et\quad b=\delta b'$

* إذا كان δ/c فان المعادلة تصبح $a'x+b'y=c'$ بوضع $c=\delta c'$

بما أن $a'\wedge b'=1$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ من $\mathbb{Z}^{*2}$ حيث $a'u_0+b'v_0=c'$ أي المعادلة $a'x+b'y=c'$ تقبل حلا

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland

www.students.ma

* عكسيا إذا كان للمعادلة $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}^2$ ليكن $(x_0;y_0)$ حلا للمعادلة أي $ax_0+by_0=c$
ومنه $\delta(a'x_0+b'y_0)=c$ إذن δ/c

خاصية

ليكن $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ و $\delta=a\wedge b$
للمعادلة $ax+by=c$ حلول في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان δ/c

حل المعادلة $ax+by=c$

لنفترض أن δ/c إذن حل المعادلة يرجع إلى حل المعادلة $a'x+b'y=c'$

بما أن $1=a'\wedge b'$ فانه يوجد $(u_0;v_0)$ حيث $a'x+b'y=1$ أي $a'c'u_0+b'c'v_0=c'$

ومنه $a'(x-c'u_0)+b'(y-c'v_0)=0$ و بالتالي $a'(x-c'u_0)=-b'(y-c'v_0)$

و بالتالي $a'/b'(c'v_0-y)$ و حيث أن $1=a'\wedge b'$ فان $a'/(c'v_0-y)$

اذن $y=-a'k+c'v_0$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ومنه نستنتج أن $x=kb'+c'u_0$

عكسيا نتأكد أن $(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)$ هو حل للمعادلة $a'x+b'y=c'$

إذن $\{(kb'+c'u_0;-a'k+c'v_0)/k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $7x-3y=1$

ليكن a من $\mathbb{N}$ بحيث باقي القسمة الاقليدية لـ a على 7 و 3 على التوالي 1 و 2

حدد باقي القسمة الاقليدية لـ a على 35

III- نظمات العد

1- نشاط تمهيدي

1- بين أن $\forall(m;n)\in\mathbb{N}^2 \quad m\geq 1\Rightarrow m^n\geq 1+n(m-1)$

2- استنتج أن $\forall m\in\mathbb{N} \quad m\succ 1\Rightarrow \forall p\in\mathbb{N} \quad \exists n\in\mathbb{N} \quad m^n\succ p$

3- بين أن $\forall b\in\mathbb{N} \quad b\succ 1\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists! k\in\mathbb{N} \quad b^k\leq n\prec b^{k+1}$

1- نبين أن $\forall(m;n)\in\mathbb{N}^2 \quad m\geq 1\Rightarrow m^n\geq 1+n(m-1)$

ليكن $(m;n)\in\mathbb{N}^2$ لدينا $m^n=((m-1)+1)^n=\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i(m-1)^i=1+n(m-1)+\sum_{i=2}^{i=n}C_n^i(m-1)^i$

و حيث أن $m-1\geq 0$ فان $m^n\geq 1+n(m-1)$

2- نستنتج أن $\forall m\in\mathbb{N} \quad m\succ 1\Rightarrow \forall p\in\mathbb{N} \quad \exists n\in\mathbb{N} \quad m^n\succ p$

ليكن $m\in\mathbb{N}$ حيث $m\succ 1$

إذا و جد n فان $m^n\geq 1+n(m-1)$

ليكن $p\in\mathbb{N}$

حسب أرخميدس يوجد n من $\mathbb{N}$ حيث $n(m-1)\succ p-1$ أي $1+n(m-1)\succ p$ إذن $m^n\succ p$

3- نبين أن $\forall b\in\mathbb{N} \quad b\succ 1\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists! k\in\mathbb{N} \quad b^k\leq n\prec b^{k+1}$

نعتبر $A_n=\{k\in\mathbb{Z}/n\prec b^{k+1}\}$

حسب (2) $\forall b\in\mathbb{N} \quad b\succ 1\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad \exists k_n\in\mathbb{N} \quad b^{k_n+1}\succ b^{k_n}\succ n$ إذن $A_n\neq\varnothing$

$A_n\subset\mathbb{N}$ و منه A_n يقبل أصغر عنصر k_{n0} أي أن $b^{k_{n0}}\leq n\prec b^{k_{n0}+1}$

لأن لو كان $b^{k_{n0}}\succ n$ و $n\geq 2$ فان $b^{k_{n0}}\geq 2\succ 1$ ومنه $k_{n0}\geq 1$ و بالتالي $k_{n0}-1\geq 0$

وحيث $b^{(k_{n0}-1)+1}\succ n$ فان $k_{n0}-1\in A_n$ وهذا يتناقض مع كون k_{n0} أصغر عنصر لـ A_n

لو أن $n=1$ فان $k_{n0}=0$ $\quad (b^0\leq 1\leq b^{0+1})$

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

2- تعريف

أساس نظمة عد هو عدد الأرقام التي تستعمل لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية

أمثلة

- أساس نظمة العد العشري هو 10. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9
- أساس نظمة العد الاثنائي هو 2. الأرقام المستعملة هي 0 و 1
- أساس نظمة العد الاثنى عشري هو 12. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9 و 10 و 11 نرمز في الكتابة لرقم10 بـ α و لـ11 بـ β
- أساس نظمة العد الثماني هو 8. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و3 و 4 و 5 و 6 و 7

3- نظمة العد ذات الأساس b . $(b \succ 1)$

أ- تمهيدة1

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b \succ 1)$

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد k و r_k و q_k في $\mathbb{N}$ حيث $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \le r_k \prec b^k$ و $0 \le q_k \prec b$

البرهان

ليكن $(b;n) \in \mathbb{N}^2$ حيث $(b \succ 1)$

إذا كان $n = 0$ فان نتيجة بديهية

إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فانه حسب النشاط التمهيدي $\exists! k \in \mathbb{N} \quad b^k \le n \prec b^{k+1}$

بإجراء القسمة الاقليدية للعدد n على b^k نحصل على $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \le r_k \prec b^k$ و $q_k \in \mathbb{N}$

لنبين أن $0 \le q_k \prec b$

إذا كان $q_k \ge b$ ومنه $q_k b^k \ge b^{k+1}$ و بالتالي $n = b^k q_k + r_k \ge b^{k+1}$ و هذا يتناقض مع كون $n \prec b^{k+1}$

إذن $0 \le q_k \prec b$

ب- حسب التمهيدة1 لدينا $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \le r_k \prec b^k$ و $0 \le q_k \prec b$

بتطبيق التمهيدة على r_k نحصل على $r_k = b^{k-1} q_{k-1} + r_{k-1}$ و $0 \le r_{k-1} \prec b^{k-1}$ و $0 \le q_{k-1} \prec b$ (لأن $r_k \prec b^k$)

نطبق التمهيدة على r_{k-1} وهكذا حت نصل الى r_1 فنحصل على

$$r_{k-1} = b^{k-2} q_{k-2} + r_{k-2} \text{ و } 0 \le r_{k-2} \prec b^{k-2} \text{ و } 0 \le q_{k-2} \prec b$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$r_2 = b q_1 + r_1 \quad \text{ و } \quad 0 \le r_1 \prec b \text{ و } 0 \le q_1 \prec b$$

$$r_1 = 1 \times q_0 \quad \text{ و } q_0 = r_1$$

بجمع جميع أطراف المتساويات نحصل على الكتابة في شكلها الوحيد $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$

حيث $0 \le q_i \prec b$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$

تمهيدة2

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $(b \succ 1)$

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ بحيث $0 \le q_i \prec b$

وi تنتمي $\{1;2;....;k\}$ و$q_k \succ 0$ اذا كان $n \succ 0$

ملاحظة

الكتابة $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ حيث $0 \le q_i \prec b$ و i تنتمي $\{1;2;....;k\}$ تبين أنه لتمثيل عدد صحيح طبيعي n في نظمة العد ذات الأساس b

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

نحتاج الى b رمز و نمثل العدد n في نظمة العد ذات الأساس b بكتابة $n=\overline{q_k q_{k-1}..........q_0}_{(b)}$

أمثلة

* في نظمة العد العشري كتابة العدد2703 هي $2703=2\times10^3+7\times10^2+0\times10+3$

* في نظمة العد الثنائي كتابة العددين 8 و 15 هي

$8=1\times2^3+0\times2^2+0\times2+0$ أي أن العدد 8 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1000}$

$15=1\times2^3+1\times2^2+1\times2+1$ أي أن العدد 15 ممثل في نظم العد الاثنائي بـ$\overline{1111}$

* في نظمة العد الثماني

$15=1\times8+7$ ومنه $15=\overline{17}_{(8)}$

$131=2\times8^2+0\times8+3$ ومنه $131=\overline{203}_{(8)}$

ج- طريقة عملية لإيجاد تمثيل عدد صحيح طبيعي في نظمة عد ما

ليكن $b\in\mathbb{N}$; $b\succ1$ $n\in\mathbb{N}$

لدينا

$$\begin{array}{ll} n=bq_1+r_0 & ;\quad 0\le r_0\prec b \\ q_1=bq_2+r_1 & ;\quad 0\le r_1\prec b \\ . & \quad . \\ q_k=bq_{k+1}+r_k & ;\quad 0\le r_k\prec b \end{array}$$

$$n\ge q_1\ge q_2\ge.....\ge q_q$$

بما أن المجموعة $A=\{q_1;q_2....\}$ مكبورة في $\mathbb{N}$ وغير فارغة فانه يوجد k بحيث $q_k=r_k$

ومنه

$$\begin{array}{ll} n=bq_1+r_0 & ;\quad 0\le r_0\prec b \\ q_1=bq_2+r_1 & ;\quad 0\le r_1\prec b \\ . & \quad . \\ q_{k-1}=bq_k+r_{k-1} & ;\quad 0\le r_{k-1}\prec b \\ q_k=r_k & \end{array}$$

و بضرب طرفي المتساوية رقم i بالعدد b^i نحصل على

$$n=bq_1+r_0$$
$$bq_1=b^2q_2+br_1$$
$$.\quad .$$
$$b^iq_i=b^{i+1}q_{i+1}+b^ir_i$$
$$.\quad .$$
$$b^{k-1}q_{k-1}=b^kq_k+b^{k-1}r_{k-1}$$
$$b^kq_k=b^kr_k$$

بجمع أطراف المتساويات نحصل على $n=\sum_{i=0}^{i=k}b^ir_i$ و $0\le r_i\prec b$ $i\in\{1;2;....;k\}$

إذا كان $r_k\ne0$ فان $n=\overline{r_kr_{k-1}......r_1r_0}$

طريقة عملية

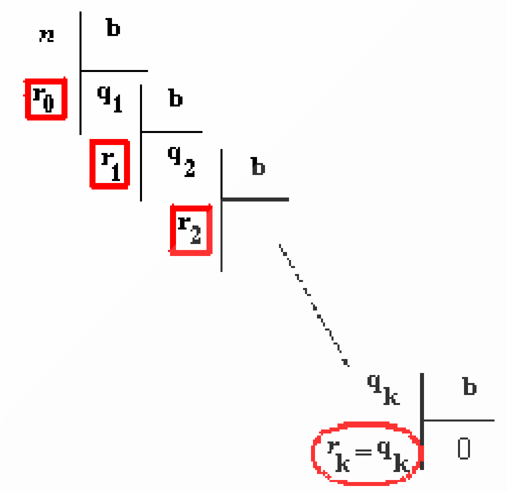
لتحديد تمثيل للعدد n في نظمة العد ذات الأساس b

نحسب البواقي r_i $(0\le i\le k)$

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

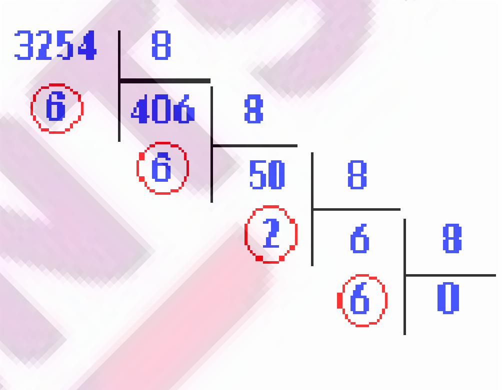
www.students.ma

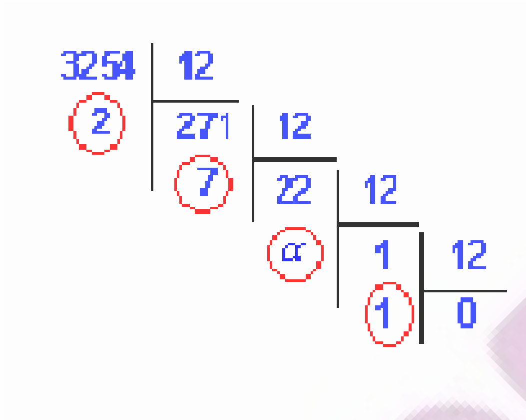
$$n=\overline{r_k r_{k-1}......r_1 r_0}_{(b)}$$



مثال

لنبحث عن تمثيل للعدد 3254 في نظمة العد الثماني ثم نظمة العد الاثنا عشري





$3254=\overline{6266}_{(8)}$ $\qquad$ $3254=\overline{1\alpha 72}_{(12)}$

3- مقارنة عددين ممثلين في نفس النظمة

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y=\overline{c_m c_{m-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $n \succ m$ فان $x \succ y$

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد بـ $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_0}_{(b)}$ و $y=\overline{c_n c_{n-1}......c_0}_{(b)}$

إذا كان $c_n=a_n \quad c_{i+1}=a_{i+1}.......c_{n-1}=a_{n-1} \quad et \quad a_i \neq c_i$ فان ترتيب x و y هو نفس ترتيب a_i و c_i

5- تغيير أساس نظمة عد

لتمثيل عدد x في نظمة عد ذات الأساس b نمثله أولا في نظمة العد العشري و نحدد تمثيله في نظمة عد ذات الأساس b

تمرين

$\overline{xxx}\times\overline{xxx}=\overline{yyyyyy}$ حيث b هل توجد نظمة العد ذات الأساس

6- مصاديق قابلية القسمة على بعض الأعداد في نظمة العد العشري

ليكن x عدد صحيح طبيعي كتابته في نظمة العدد العشري هي $x=\overline{a_n a_{n-1}.....a_1 a_0}$

Nitro Software, Inc.
100 Portable Document Lane
Wonderland
www.students.ma

www.students.ma

$$x \equiv 0 \quad [4] \Leftrightarrow 4/\overline{a_1 a_0}$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \quad ou \quad a_1 = 5$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{00;25;50;75\}$$

$$x \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [3]$$

$$x \equiv 0 \quad [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [9]$$

$$x \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \equiv 0 \quad [11]$$