

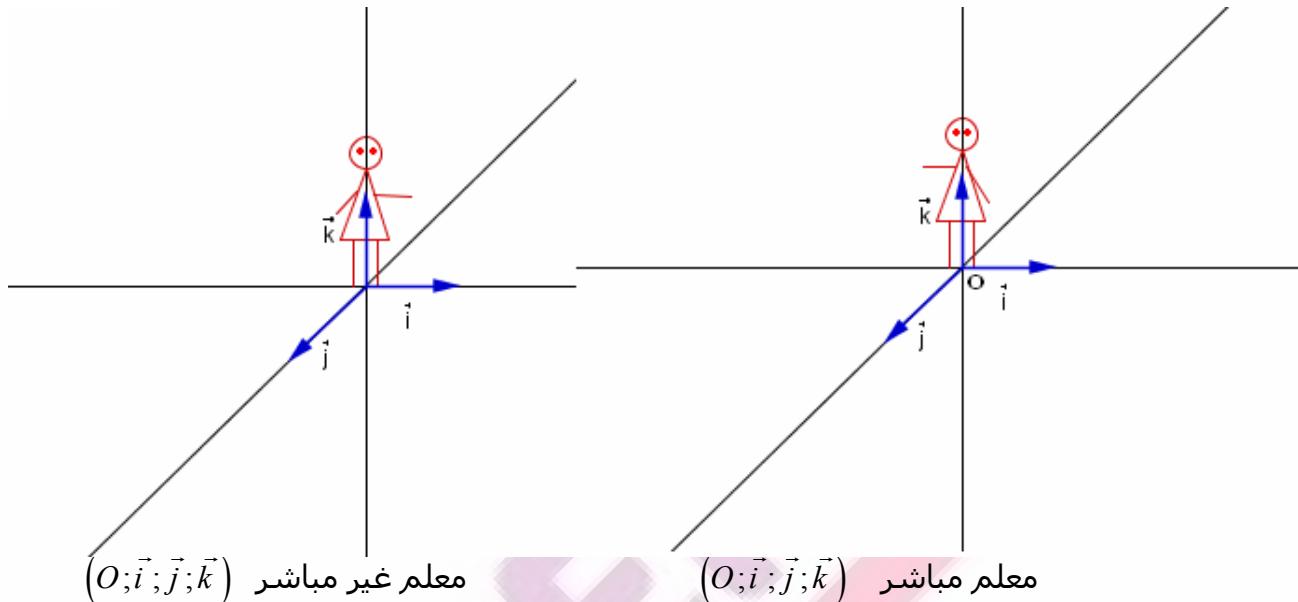
I- توجيه الفضاء**1- معلم موجه في الفضاء**

ننسب الفضاء E إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\overrightarrow{OK} = \vec{k} \quad \overrightarrow{OJ} = \vec{j} \quad \overrightarrow{OI} = \vec{i}$$

لتكن I و J و K ثلات نقط حيث \vec{i} هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر

إلى I ، النقطة J إما توجد على يمين « رجل أمبير » أو على يساره .

**تعريف :**

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. . لتكن I و J و K ثلات نقط حيث \vec{i} * معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »
نقول إن : $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »
 $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم مباشر

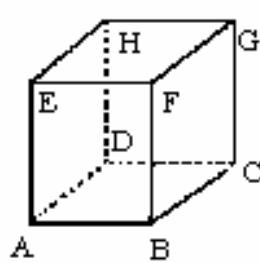
$(O; \vec{i}; \vec{j}; -\vec{k})$ معلم غير مباشر

$(O; \vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$ معلم مباشر

$(ABCDEF GH)$ مكعب طول حرفه 1 **

معلمان مباشران $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$; $(B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BF})$

معلمان غير مباشران $(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})$, $(E; \overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH})$

**2- الأسرة المعاشرة**

يمكننا توجيه الفضاء V_3 ، اذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد المنظم $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معاشر ادا كان $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معاشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و \vec{k} متجمدة واحدة و منتظمية على (P) ، و O نقطة من المستوى (P) $(O; \vec{i}; \vec{j})$ م.م.م. للمستوى (P)

لدينا $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد منظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ في المستوى (P) معلمًا مباشرًا إذا كان المعلم المتعامد

الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشرا

* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيهه متوجهة منتظمة عليه.

* كل المستويات الموازية ل(P) له نفس توجيه المستوى (P)

II - الحداء المتجهي

1- تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متوجهتين من الفضاء V_3 و A و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} في هذا الترتيب، هو المتوجهة التي لها بـ $\vec{v} \wedge \vec{u}$ المعرفة كما يلي

* إذا كانتا \vec{u} و \vec{v} مستقيميتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

* إذا كانتا \vec{u} و \vec{v} غير مستقيميتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u}$ هي المتوجهة التي تتحقق:

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ عمودي على كل من \vec{u} و \vec{v}

- $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر.

$$\left[\widehat{AOB} \right] \quad \text{حيث } \theta \text{ قياس الزاوية} \quad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشرا

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

* إذا كان \vec{u} و \vec{v} متوجهتين واحديتين و متعامدتين فان $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر.

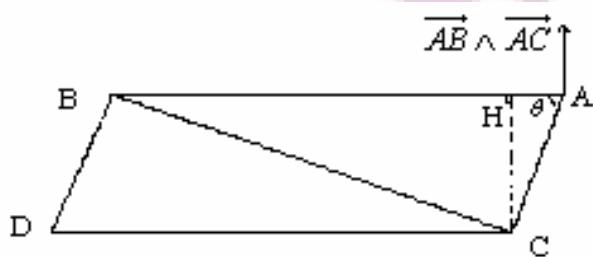
$$\|\vec{u}\| = 5 \quad \|\vec{v}\| = 2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \quad (\vec{u}; \vec{v}) = \theta \quad \theta \in [0; \pi] \quad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ حسب} \quad \text{نحسب} \quad \text{تمرين}$$

2- خصائص

A- خاصية

إذا كانت A و B و C ثلات نقاط غير مستقيمية من الفضاء فإن المتوجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC).

لتكن A و B و C ثلات نقاط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية على (AB) المسقط العمودي لـ C



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \theta \quad HC = AC \sin \theta$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times HC$$

خاصية

مساحة المثلث ABC هو نصف $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

نسمحة

مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

D- خاصية

لتكن \vec{u} و \vec{v} متوجهتين من الفضاء يكون $\vec{u} \wedge \vec{v}$ منعدماً أداً فقط كأن \vec{u} و \vec{v} مستقيمي.

البرهان * \Rightarrow (بديهي - التعريف -)

$\Leftarrow *$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \\
 &\Rightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = 0 \\
 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \quad \vee \quad \|\vec{v}\| = 0 \quad \vee \quad \sin \theta = 0 \\
 &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \quad \text{sont liés}
 \end{aligned}$$

ملاحظة $\vec{0}$ و Bg و C مستقيمية \Leftrightarrow جـ- الحداـء المـتحـفـي وـالـعـمـلـيـاتـ (ـنـقـبـلـ)

$$\begin{aligned} \forall (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in V_3^3 & \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} & (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ & & (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ & & \vec{u} \wedge \vec{v} &= -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \\ & & \vec{u} \wedge \vec{u} &= \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

تمرين

• معلم متعمد ممنظم مباشر $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$(2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j}) \quad (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \wedge \vec{k} \quad (\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \vec{j} \quad \vec{i} \wedge 3\vec{j} \quad \text{أحسب}$$

تمرين

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d} \quad ; \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d} \quad \text{لتكن}$$

بین \vec{a} و \vec{c} مسنقیمتان $\vec{b} - \vec{d}$ است.

3- الصيغة التحليلية للحداء المتجهى في م.م.م مباشر.

معلم متعامد ممنظم مباشر ($o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$)

$$\begin{aligned}\vec{u}(x,y,z) \quad & \vec{v}(x';y';z') \\ \vec{u} \wedge \vec{v} = & \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right) \wedge \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \right) \\ = & \left(yz' - zy' \right) \vec{i} + \left(zx' - xz' \right) \vec{j} + \left(xy' - yx' \right) \vec{k}\end{aligned}$$

خاصة

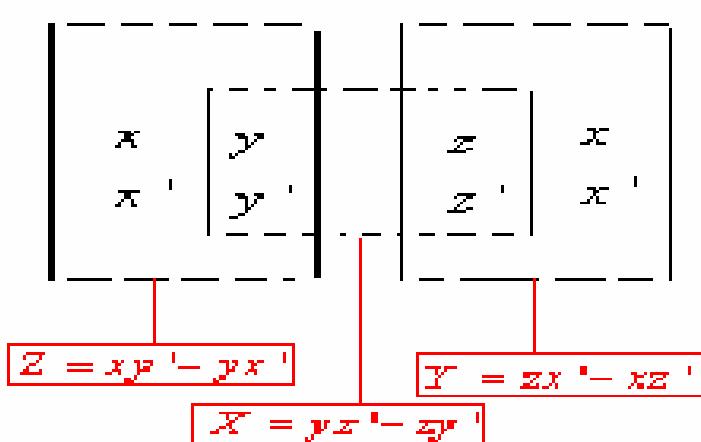
الفضاء E منسوب إلى معلم متعمد ممنظم مباشر $(\vec{v}(x; y'; z) \text{ و } \vec{u}(x; y; z))$ و $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متوجهتان

من ۳

إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{v} \wedge \vec{u}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ هو $(X; Y; Z)$ حيث

$$X = yz' - zy' \quad Y = zx' - xz' \quad Z = xy' - yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعية التالية



$$C(1;2;1) \quad B(0;-3;2) \quad A(1;2;1) \quad \vec{u}(1;2;0) \quad \vec{v}(-2;-1;1)$$

أحسب مساحة المثلث (ABC)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \quad \text{حد}$$

مثال

III – تطبيقات الحداء المترافق

1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمة**خاصية**

لتكن C_1 و C_2 ثلاث نقط غير مستقيمية من فضاء منسوب الى معلم متعمد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

مثال حدد معادلة المستوى (ABC)

مثـالـ نعتبر $A(1;2;3)$ و $B(1;-1;1)$ و $C(2;1;2)$

2- تقاطع مستويـس

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعمد ممنظم مباشر

$$(P) : ax+by+cz+d=0$$

$$(P') : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

لدينا $\vec{n}'(a';b';c')$ منظممية لـ (P')

* اذا كان (P) و (P') متقطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و (P') موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و (P') متقطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع $4x-4y+2z-5=0$ و $x+2y-2z+3=0$

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ \vec{u} ، M نقطة من الفضاء و H مسقطها العمودي على (D)

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \quad AH \text{ est } \vec{u} \text{ liés}$$

$$\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \cdot \|\vec{u}\| \sin \frac{\pi}{2} = HM \cdot \|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ \vec{u} ، M نقطة من الفضاء.

$$d(M;(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{مسافة النقطة } M \text{ عن المستقيم } (D) \text{ هي}$$

تمرين

$$d(A;(D)) = ? \quad (D) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad A(3;2;-1)$$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعمد ممنظم مباشر نعتبر $A(1;2;1)$ و $B(-2;1;3)$ و (D) المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلته}$$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد $d(A;(D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)