

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية	سلسلة 3
تمرين 1: بين أن كل متتاليتين مما يلي متحاذيتان: (1) $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ (2) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$		
تمرين 2: نعتبر المتتاليتين: $\begin{cases} u_0 = a ; v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$ حيث $b > a > 0$ (1) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leq v_n$ (2) أدرس رتابة u_n و v_n (3) أثبت أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n)$ (4) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (b - a)$ (5) أثبت أن u_n و v_n متقاربتان (6) نضع: $w_n = u_n v_n$ أ) أدرس رتابة w_n ب) حدد نهاية كل من u_n و v_n		
تمرين 3: نعتبر المتتاليتين: $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ (1) بين أن u_n و v_n متقاربتان (2) نضع $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ ونفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell = \frac{p}{q}$ حيث $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ أ) بين أن: $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{q q!}$ ب) بين أن $\frac{p}{q} - u_q$ كسر مقامه $q!$ (3) استنتج أن $\ell \notin \mathbb{Q}$ (العدد ℓ نرمز له بـ e ويسمى الأساس النبيري)		