السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	النهايات و الاتصال حل مقترح	سلسلة 4

تمرين 1 : $f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^3$

1 لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ منه : $D_f=[-1;+\infty[$

2 ليكن $(x,y)\in[-1;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow x+1>y+1\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-1>\sqrt{y+1}-1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)^3>\left(\sqrt{y+1}-1\right)^3$$
$$x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

إذن f تزايدية قطعا على D_f

3 بما أن f متصلة و تزايدية قطعا على D_f

فهي تقابل من D_f نحو $J=f([-1;+\infty[)=\left[f(-1);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=[-1;+\infty[$

4 ليكن $x\in[-1;+\infty[$ و $y\in[-1;+\infty[$ ، لدينا : $f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow \left(\sqrt{y+1}-1\right)^3=x$

إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن :

$$f^{-1}(x)=y \Rightarrow \sqrt{y+1}-1=\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt[3]{x}+1$$
$$\Rightarrow y+1=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2 \Rightarrow y=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2-1=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}$$

إذا كان $x\in[-1;0[$ فإن :

$$f^{-1}(x)=y \Rightarrow \left(1-\sqrt{y+1}\right)^3=-x$$
$$\Rightarrow 1-\sqrt{y+1}=\sqrt[3]{-x} \Rightarrow \sqrt{y+1}=1-\sqrt[3]{-x}$$
$$\Rightarrow y+1=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2 \Rightarrow y=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2-1=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$$

بالتالي:
$$\begin{cases} f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}\ ;\ x\in[-1;0[\\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}\ ;\ x\in[0;+\infty[\end{cases}$$

يبدو سؤالا سهلا في البداية، إذ أن عدم الانتباه أن دالة الجذر المكعب معرفة على $[0;+\infty[$ سيجعلنا نتسرع في تحديد صيغة الدالة العكسية دون مراعاة مجال التعريف.

تمرين 2 : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1 لدينا : $\forall x\in]-1;+\infty[\ :\ \sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=f(x)$

2 ليكن $(x,y)\in[0;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}\end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}>0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>-\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}>\sqrt{y+1}-\frac{1}{\sqrt{y+1}}$$
$$x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

إذن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ ، و بما أنها متصلة عليه

فهي إذن تقابل من $[0;+\infty[$ نحو $J=f([0;+\infty[)=\left[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=[0;+\infty[$

ليكن $x \in [0;+\infty[$ و $y \in [0;+\infty[$ ، لدينا :

$$f^{-1}(x) = y \Rightarrow f(y) = x \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y}} = x$$
$$\Rightarrow y^2 = x^2(y+1) \Rightarrow y^2 - x^2 y - x^2 = 0$$

محددة الحدودية $y^2 - x^2 y - x^2 = 0$ ذات المجهول y هي : $\Delta = x^4 + 4x^2 \geq 0$

3 إذن : $f^{-1}(x) = y \Rightarrow y = \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + x^2}}{2}$ ou $y = \frac{x^2 - \sqrt{x^4 + x^2}}{2}$

و بما أن : $\frac{x^2 + \sqrt{x^4 + x^2}}{2} \geq 0$ $\forall x \in [0;+\infty[$ فإن : $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + x^2}}{2}$ $\forall x \in [0;+\infty[$

لسنا مظطرين للبرهان ان $\frac{x^2 - \sqrt{x^4 + x^2}}{2} \notin [0;+\infty[$ $\forall x \in [0;+\infty[$ و السبب أننا نعلم مسبقا عن طريق الاتصال والرتابة وحدانية تعبير الدالة العكسية، لذلك أي تعبير سنجده يحقق الشروط سيكون تلقائيا هو التعبير المبحوث عنه و الوحيد. لكننا في السنة الأولى بكالوريا لم نكن نكتفي بهذا الأمر و السبب أننا لم نكن نتوفر على خاصية تسمح مسبقا بضمان وجود الدالة العكسية.

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 - x + 1} - x \right) = \lim_{x \mapsto +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 \left(8 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)} - x \right) = \lim_{x \mapsto +\infty} x \left(\sqrt[3]{8 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - 1 \right) = +\infty$$

$(+\infty \times (2-1)\ )$

$$\lim_{x \mapsto 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \right) = \lim_{x \mapsto 0} \frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1 \right)} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \mapsto -2^-} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x+2} \right) = \lim_{x \mapsto -2^-} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{-(-x-2)} = \lim_{x \mapsto -2^-} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{-\sqrt[3]{(-x-2)^3}} = \lim_{x \mapsto -2^-} -\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)^3}} = \lim_{x \mapsto -2^-} -\sqrt[3]{\frac{2-x}{(x+2)^2}} = -\infty$$

استعمال الخاصية $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ممكن لكن به مخاطرة حيث يجب أن يكون a و b موجبين، لكن $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ هو جذاء عددين سالبين، لذلك يتوجب كتابتها على شكل $x^2 - 4 = (-x-2)(-x+2)$

تمرين 4 : أثبت المتساويات التالية :

لنبين أن : $\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ ، نضع : $a = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)$

لدينا ، $\begin{cases} 0 < \frac{1}{5} < 1 \\ 0 < \frac{2}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < \frac{\pi}{2}$

و $\tan(a) = \frac{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) + \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right).\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1$ ، إذن : $\begin{cases} \left(a, \frac{\pi}{4}\right) \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan(a) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$

لاحظ جيدا شروط البرهان على المتساوية. فلا يكفي البرهان أن $\tan(a) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ بل يجب البرهان قبل ذلك أنهما ينتميان معا لمجال من الشكل : $\left]\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ حيث تكون فيه دالة قوس الظل تقابلا.

لنبين أن : $\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$

لدينا : $\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$

نضع : $a=\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$ و $b=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$

لدينا : $\frac{4}{3}>0 \Rightarrow 0<\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<-\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<0 \Rightarrow 0<\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2}$

و أيضا : $0<\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$

ولدينا : $\tan(b)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\frac{1}{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}=\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

إذن : $\begin{cases}(a,b)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2\\ \tan(a)=\tan(b)\end{cases} \Rightarrow a=b$ ، و هذا ينهي البرهان

لم نكن مظطرين لحصر $\frac{4}{3}$ لأننا نعلم مسبقا أن : $\forall x\in IR \quad \frac{-\pi}{2}<\text{Arctan}\, x<\frac{\pi}{2}$

لنبين أن : $\forall x<0 \quad \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2}$

لدينا : $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2}-\text{Arctan}(x)$

نضع : $a=\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ و $b=\frac{-\pi}{2}-\text{Arctan}(x)$

لدينا : $x<0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2}<\text{Arctan}(x)<0 \Rightarrow 0<-\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{-\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<0$

و أيضا : $-\frac{\pi}{2}<\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)<0$ ، ولدينا :

$$\tan(b)=\tan\left(\frac{-\pi}{2}-\text{Arctan}(x)\right)=\tan\left(\frac{-\pi}{2}+\pi-\text{Arctan}(x)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(x)\right)=\frac{1}{\tan(\text{Arctan}(x))}=\frac{1}{x}$$

إذن : $\begin{cases}(a,b)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2\\ \tan(a)=\tan(b)\end{cases} \Rightarrow a=b$ ، و هذا ينهي البرهان

استعملنا الخاصية : $\tan(x)=\tan(x+k\pi)\,/\,k\in Z$

تمرين 5 :

نرمز لمعادلة المقترحة ب: $(E):\text{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)+\text{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$ ، مجموعة صلاحيتها هي : $D=IR-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

لدينا :

$$(E)\Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(x) \Rightarrow \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(x)\right)$$

$$(E) \Rightarrow \frac{1}{2x-1}=\frac{1}{\tan(\text{Arctan}(x))}=\frac{1}{x}\Rightarrow 2x-1=x \Rightarrow x=1$$

عكسيا يمكن التحقق بسهولة من أن 1 حل لهذه المعادلة ، بالتالي : $S=\{1\}$

ليس من الضروري البرهان أن $\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(x)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و السبب أنه من خلال المعادلة التي هي معطاة يساوي تعبيرا نعلم

مسبقا أنه ينتمي لهذا المجال، فالأمر مختلف عن التمرين السابق لأننا لسنا بصدد البرهان على هذه المتساوية، بل نستعملها و نقوم باستنتاجات.

$$\text{Arctan}(2x)+\text{Arctan}(3x)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\text{Arctan}(2x)+\text{Arctan}(3x))=1$$
$$\Rightarrow \frac{2x+3x}{1-6x^2}=1 \Rightarrow 5x=1-6x^2$$
$$\Rightarrow 6x^2+5x-1=0$$
$$\Rightarrow x=-1 \ ou \ x=\frac{1}{6}$$

عكسيا نتحقق أن $\frac{1}{6}$ هو العدد الوحيد الذي يحقق هذه المعادلة (لأن: $\text{Arctan}(-2)+\text{Arctan}(-3)<0$ و $\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ نبرهن عليها كما في السؤال الأول من التمرين السابق)

خلاصة : $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

استعملنا المحددة لتحديد حلول المعادلة $6x^2+5x-1=0$

تمرين 6 : لنحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x(Arctg(2x)-Arctg(x))$

نضع: $t=\frac{1}{x}$ ، إذن:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x(\text{Arctan}(2x)-\text{Arctan}(x))=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}\left(\frac{2}{t}\right)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t}=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+\text{Arctan}(t)}{t}$$
$$=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}(t)-\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}(t)}{t}-\frac{\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$$
$$=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}(t)}{t}-\frac{1}{2}\frac{\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

استعملنا المتساوية : $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2} \quad \forall x>0$ و التي يمكن استعمالها في حال لم تكن كسؤال فرعي مساعد، و أيضا النهاية الهامة : $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\text{Arctan}(x)}{x}=1$ و التي يمكن البرهان عنها بسهولة باستعمال تغيير المتغير $\text{Arctan}(x)=t$