حساب الاحتمالات

I- التجارب العشوائية

1- تقديم يوجد نوع من الأحداث تقع دائما بنفس الطريقة، فمثلا إذا أطلقنا شيئا ذا وزن من يدنا نعلم مسبقا أنه سوف يسقط على الأرض ، إن دراسة هدا النوع من الأحداث بعد إيجاد المعادلات و قوانينها و معطياتها الأولية المنظمة لها يمكننا توقع نتيجتها النهائية .

لكن هناك نوع آخر من الأحداث التي تنتج عن نفس المعطيات ومع دلك لا يمكن أن نتوقع نتيجتها , فمثلا إذا رمينا نردا على طاولة مستوية لا يمكن إن نعلم مسبقا الرقم الذي سيعينه النرد عندما يستقر, رغم إن المعطيات لا تتغير في كل محاولة.

إن هذه التجارب تسمى تجارب عشوائية أو اختبارات عشوائية .

إن التفكير في تجربة عشوائية ما معناه جرد جميع الإمكانيات أي جميع النتائج المحتملة و ترتيبها حسب درجة احتمال وقوعها.

2- أمثلة * "رمي النرد في الهواء" تجربة عشوائية. هناك 6 نتائج ممكنة

* " سحب ثلاثة كرات من كيس يحتوي على 7كرات " تجربة عشوائية .

- هناك C_7^3 نتيجة ممكنة إذا كان السحب تأنيا .

- A_7^3 نتيجة ممكنة إذا كان السحب بالتتابع وبدون إحلال.

- 7^3 نتيجة ممكنة ادا كان السحب بالتتابع وبإحلال.

* " رمي قطعة نقود مرتين " تجربة عشوائية مكونة من اختبارين عشوائيين.

مجموعة النتائج الممكنة $\{FF;FP;PF;PP\}$

3- مصطلحات

a- الإمكانية – كون الإمكانيات

كل نتيجة من بين النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تسمى إمكانية .
مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات و نرمز له بـ Ω

أمثلة * $\Omega=\{F;P\}$ كون الإمكانيات المرتبط بالتجربة " رمي قطعة النقود مرة واحدة ".

* $\Omega=\{1,2;3;4;5;6\}$ كون الإمكانيات المرتبط بالتجربة " رمي النرد مرة واحدة ".

b- الحدث

كل جزء من المجموعة Ω كون الإمكانيات يسمى حدثا .

أمثلة * $A=\{PP;FF\}$ هو حدث من التجربة " رمي قطعة النقود مرتين متتاليتين "

* $\{1\}$ هو حدث من التجربة " رمي النرد مرة واحدة "

* نعتبر التجربة العشوائية " رمي النرد مرة واحدة "

B " الحصول على عدد زوجي " هو حدث في هده التجربة $B=\{2;4;6\}$

c- تحقيق أو وقوع حدث

إذا قمنا بتجربة و كانت النتيجة تنتمي إلى الحدث A فإننا نقول إن الحدث A قد تحقق.

فمثلا إذا رمينا نردا و حصلنا على أحد الأعداد 2 أو 4 أو 6 فان نقول إن الحدث B " الحصول على عدد زوجي " قد تحقق.

d- تحقيق الحدثين $A\cap B$ و $A\cup B$

إذا تحققا الحدث A و الحدث B في نفس الوقت فإننا نقول إن الحدث $A\cap B$ قد تحقق.
إذا تحققا الحدث A أو الحدث B أو هما معا فإننا نقول إن الحدث $A\cup B$ قد تحقق.

مثال

التجربة " رمي النرد مرة واحدة "

نعتبر الحدثين A " الحصول على عدد قابلة للقسمة على 3 " و B " الحصول على عدد زوجي "

إذا رمينا النرد و حصلنا على 6 فإننا نقول إن الحدث $A\cap B$ قد تحق

إذا رمينا النرد و حصلنا مثلا على أحد الأعداد 2 , 3, 4 , 6 فإننا نقول إن الحدث $A\cup B$ قد تحقق

e- أحداث خاصة

ليكن Ω كون الإمكانيات

أ- الحدث الأكيد
$\Omega \subset \Omega$ و بما أن نتيجة التجربة تنتمي دائما إلى كون الإمكانيات Ω أي أن Ω حدث يتحقق دائما فان Ω يسمى الحدث الأكيد.

ب- الحدث المستحيل
$\varnothing \subset \Omega$ و بما أن $\varnothing$ لا يحتوي على أي نتيجة , أي $\varnothing$ لا يتحقق أبدا فان $\varnothing$ يســمى الحدث المستحيل.

ج- الحدث الابتدائي الحدث الابتدائي هو حدث يحتوي على إمكانية واحدة.
$\{pp\}$ حدث ابتدائي في التجربة " رمي قطعة نقود مرتين "

f- انسجام حدثين
نقو ل إن الحدثين A و B غير منسجمين إذا و فقط A∩B=Ø

مثال
التجربة " رمي قطعة النقود ثلاث مرات متتالية "
نعتبر الأحداث $A=\{FFF;PPP\}$ $B=\{FPP;PFF;PPF\}$ $C=\{FPF;PFF;FFP\}$
A و B غير منسجمين لأن A∩B=Ø
$B\cap C=\{PFF\}$ ومنه B و C منسجمان

g- الحدث المضاد ليكن Ω كون الإمكانيات
نقول إن الحدثين A و B متضادان إذا وفقط إذا كان A∩B=Ø و A∪B=Ω
نكتب $\overline{A}=B$ أو $\overline{B}=A$

أمثلة

* نعتبر التجربة " رمي النرد مرة واحدة " و نسجل رقم وجهه الأعلى.
كون الإمكانيات $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$
نعتبر الأحداث $A=\{1;2;4;6\}$ $B=\{3;5\}$ و D " عدد مضاعف لـ 6 " و C " عدد فردي "
و E " عدد زوجي " و F " عدد أكبر قطعا من 6 "
لدينا A∩B=Ø و A∪B=Ω و منه $\overline{A}=B$ لدينا $\overline{C}=E$
$D=\{6\}$ حدث ابتدائي .
$A\cap C\neq\varnothing$ و منه A و C حدثان منسجمان.
$E\cap B=\varnothing$ و منه E و B غير منسجمين.
F حدث مستحيل .

** نعتبر كيس يحتوي على2 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء . " نسحب من الصندوق تأنيا 3 كرات "
A " الحصول على كرة واحدة بيضاء فقط " B " الحصول على كرة واحدة حمراء فقط "
C " الحصول على3 كرات بيضاء " D " الحصول على كرتين حمراويتين على الأقل "
كون الإمكانيات Ω يضم جميع الإمكانيات و عددها C_6^3
عدد إمكانيات الحدث A هو $C_2^1C_4^2$ عدد إمكانيات الحدث B هو $C_4^1C_2^2$
C حدث مستحيل عدد إمكانيات الحدث D هو $C_4^3+C_2^1C_4^2$
A و B غير منسجمين لأن لا يمكن أن نحصل على كرة واحدة حمراء فقط و كرة واحدة بيضاء فقط في نفس الوقت (لا يمكن أن يتحققا معا في نفس الوقت $\overline{B}=D$)

II- الفضاءات الاحتمالية المنتهية
1- أنشطة
نعتبر نردا أوجهه تحمل الأرقام 1و2و3و4و5و6
نرمي النرد و نسجل الرقم المحصل عليه عندما يستقر .
نعتبر الأحداث A " الحصول على عدد زوجي " B " الحصول على مضاعف لـ 3 "
C " الحصول على مضاعف لـ 7 "
1- حدد A و B بتفصيل . ما هو الحدث الذي له أكبر حظ أن يتحقق ؟
2- ما هي نسبة احتمال الحصول على 1 أي تحقيق الحدث $\{1\}$ ؟
3- ما هي نسبة احتمال الحصول على A ثم على B ثم على C؟

2 – احتمال على مجموعة

a- تعريف

لتكن $\Omega = \{a_1; a_2; ....a_n\}$ مجموعة منتهية

إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد p_i ينتمي إلى $[0;1]$ و كان مجموع جميع الأعداد هو 1 فإننا نقول إننا عرفنا احتمالا p على Ω.

نقول إن احتمال الحدث الابتدائي $\{a_i\}$ هو العدد p_i نكتب $p(\{a_i\}) = p_i$.

الزوج $(\Omega; p)$ يسمى فضاءا احتماليا منتهيا

b – احتمال حدث

تعريف

احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي توجد ضمن A نرمز له ب $p(A)$

ملاحظة * كل احتمال على Ω هو تطبيق من مجموعة الأحداث $P(\Omega)$ نحو $[0;1]$

* $p(\varnothing) = 0$ $\quad$ $p(\Omega) = 1$

مثال نرمي قطعة نقود مرتين متتاليتين

ما هو احتمال الحصول على الوجه مرتين

ما هو احتمال الحصول على الحدث A " ظهور الوجه على الأكثر مرة "

$\Omega = \{FF; FP; PF; PP\}$ $\quad$ $p(\{FF\}) = \frac{1}{4}$

$A = \{PP; PF; FP\}$ $\quad$ $p(A) = p(\{PF\}) + p(\{FP\}) + p(\{PP\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

تمرين

نعتبر نردا مغشوشا بحيث احتمال ظهور العدد2 هو ثلاث مرات احتمال ظهور العدد1 , و أن الأعداد 1و3 و4 و 5 و6 لها نفس احتمال الظهور . نرمي النرد مرة واحدة.

1- احسب احتمال كل حدث ابتدائي في هده التجربة .

2- أحسب احتمال الحدث A " الحصول على عدد زوجي "

تمرين

يحتوي صندوق على كرتين حمراويتين مرقمتين بـ 1و2 على التوالي و 3 كرات خضراء مرقمة ب 1و2 و 3 على التوالي . نسحب تأنيا كرتين من الصندوق

1- حدد كون الإمكانيات .

2- أحسب كل حدث ابتدائي .

3- أحسب احتمال الحصول على الحدث A "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط "

4- أحسب احتمال الحصول على الحدث B "الحصول على كرتين مجموع رقميهما 4 "

3- احتمال اتحاد و تقاطع حدثين

a - احتمال اتحاد حدثين غير منسجمين

ليكن A و B حدثين غير منسجمين

$A = \{a_1; a_2; ......; a_n\}$ $\quad$ $B = \{b_1; b_2; ....; b_m\}$ $\quad$ $A \cup B = \{a_1; a_2; ......; a_n; b_1; b_2; ....; b_m\}$

$$p(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} p(\{a_i\}) + \sum_{i=1}^{m} p(\{b_i\}) = p(A) + p(B)$$

خاصية

لكل حدثين غير منسجمين A و B $\quad$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

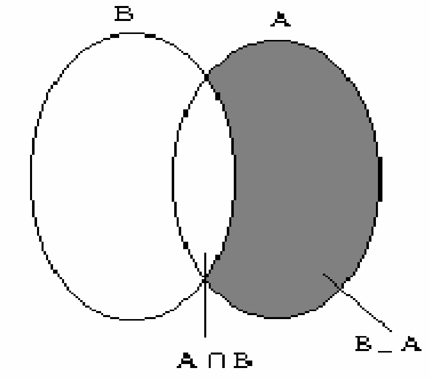
b- احتمال الحدث المضاد

لدينا $A \cap \bar{A} = \varnothing$ $\quad$ $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) \Leftrightarrow p(\Omega) = p(A) + p(\bar{A}) \Leftrightarrow 1 = p(A) + p(\bar{A})$$

خاصية

لكل حدث A من Ω $\quad$ $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$



c- احتمال اتحاد حدثين

ليكن A و B حدثين من Ω $B-A=\{x\in B/x\notin A\}$

لدينا $A\cup B=A\cup(B-A)$ $A\cap(B-A)=\varnothing$

ومنه $p(A\cup B)=p(A)+p(B-A)$

و لدينا $B=(A\cap B)\cup(B-A)$ $(A\cap B)\cap(B-A)=\varnothing$

و منه $p(B)=p(A\cap B)+p(B-A)$

أي $p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)$

ادن $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

خاصية

لكل حدثين A وB من كون الإمكانيات من Ω $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

4- فرضية تساوي الاحتمالات

احتمال حدث تذكير الرمز $cardE$ يقرأ رئيسي E و هو عدد عناصر المجموعة E

خاصية

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال فان احتمال كل حدث A هو $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}$

حيث Ω كون الإمكانيات.

البرهان ليكن $\Omega=\{a_1;a_2;........;a_n\}$ $card\Omega=n$ A حدث حيث $cardA=k$

بما أن جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمالات فان $p(\{a_i\})=\frac{1}{n}$ $1\le i\le n$ $\forall i$

و بما أن $p(A)$ تساوي مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي ضمن A و عددها k فان

$$p(A)=k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}=\frac{cardA}{card\Omega}$$

ملاحظة

إن فرضية تساوي احتمالات الأحداث الابتدائية يمكن أن تذكر صراحة في نص التمرين كما يمكن أن تفهم من خلال شروط التجربة .

تمرين

يحتوي صندوق على 4 كرات بيضاء و 5 حمراء و 6 صفراء . نسحب ثلاث كرات من الصندوق

نعتبر الأحداث A " الحصول على ثلاث كرات صفراء "

B " الحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون "

C " الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون "

D " الحصول على الأقل على كرة صفراء "

1- أحسب احتمال كل حدث من الأحداث A و B و C و D إذا كان السحب تآنيا .

2- نفس السؤال إذا كان السحب بالتتابع و بدون إحلال.

3- نفس السؤال إذا كان السحب بالتتابع و بإحلال.

الحل

1- ليكن Ω كون الإمكانيات $card\Omega=C_{15}^3=455$

$cardA=C_6^3=20$ $p(A)=\frac{20}{455}=\frac{4}{99}$ $cardB=C_6^3+C_5^3+C_4^3=34$ $p(B)=\frac{34}{455}$

C هو الحدث المضاد ل B $p(C)=1-p(B)=1-\frac{34}{455}$

ليكن F " الحصول على ثلاث كرات لا تضم أي كرة صفراء "

$cardF=C_9^3=84$ $p(F)=\frac{84}{455}$

F حدث مضاد للحدث D $\quad p(D)=1-p(F)=1-\frac{84}{455}$

تمرين

ليكن A و B حدثين من فضاء احتمالي حيث $p(A)=\frac{1}{3}$ $\quad p(B)=\frac{1}{4}$ $\quad p(A\cap B)=\frac{1}{6}$

1- بين أن $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

2- أحسب $p(A\cup B)$ $\quad p(\overline{A}\cup\overline{B})$

تمرين

نعتبر نردا أوجهه الستة مرقمة من 1 الى6 , نرمي النرد ثلاث مرات متتالية فنحصل على عدد مكون من ثلاثة أرقام . أحسب احتمال الأحداث

A " الحصول على عدد رقم مئاته هو 2 "

B " الحصول على عدد مكون من أرقام مزدوجة "

C " الحصول على عدد مكون من أرقام مختلفة مثنى مثنى "

III- الاحتمال الشرطي

1- الاحتمال الشرطي

a- أنشطة تضم إحدى الثانويات 500 تلميذ موزعين حسب الجدول التالي :

الشعبة / الجنس	الأدب	ع تجريبية	المجموع
إناث	140	120	260
ذكور	60	180	240
المجموع	200	300	500

نختار عشوائيا تلميذا من بين 500 تلميذ

1- أحسب احتمال الأحداث التالية

G "اختيار ذكر " $\quad F$ " اختيار أنثى " $\quad E$ " اختيار فرد من ع تجريبية "

L " اختيار فرد من الأدب " $\quad G\cap E$ " اختيار تلميذ ذكر من ع تجريبية "

2- إذا كان تلميذ ذكرا فما هو احتمال لكي يكون من شعبة ع تجريبية ؟

الحل

1- $card\Omega=500$ $\quad p(G)=\frac{204}{500}$ $\quad p(F)=\frac{260}{500}$ $\quad p(E)=\frac{300}{500}$ $\quad p(L)=\frac{200}{500}$ $\quad p(G\cap E)=\frac{180}{500}$

2- إذا كان تلميذ ذكرا فاحتمال لكي يكون من شعبة ع تجريبية هو $\frac{180}{240}$

لأنه يوجد 180 تلميذ ذكر في ع تجريبية من بين 240 ذكر .

$\frac{180}{240}$ هو احتمال الحصول على تلميذ من ع تجريبية علما أنه ذكرا نرمز له بـ $p_G(E)$ أو $p(E/G)$

يقرأ احتمال الحدث E علما أن الحدث G محققا نكتب $p_G(E)=\frac{180}{240}$

ملاحظة لدينا $\frac{p(G\cap E)}{p(G)}=\frac{\frac{card(G\cap E)}{card(\Omega)}}{\frac{card(G)}{card(\Omega)}}=\frac{card(G\cap E)}{card(G)}=p_G(E)$

b- تعريف

ليكن A و B حدثين من فضاء احتمالي منته حيث $p(A)\neq 0$

احتمال الحدث B علما أن الحدث A محققا هو $p_A\left(B\right)=p\left(B/A\right)=\dfrac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(A\right)}$

ملاحظة إذا كان لجميع الأحداث الابتدائية نفس الاحتمال فان $p_A\left(B\right)=\dfrac{card\left(A\cap B\right)}{card\left(A\right)}$

c- صيغة الاحتمالات المركبة

خاصية

إذا كان A و B حدثان احتمالهما غير منعدمين فان $p\left(A\cap B\right)=p\left(A\right)p_A\left(B\right)=p\left(B\right)p_B\left(A\right)$

تمرين

يحتوي كيس على 5 كرات سوداء مرقمة بـ 1 , 1 , 1 , 1 , 2 و ثلاث كرات بيضاء مرقمة ب 1 , 1 , 2 .

نسحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين

أحسب احتمال الحدثين I " الحصول على كرتين سوداويتين مجموع رقميهما 2 "

J " الحصول على كرتين سوداويتين علما أن مجموع رقميهما 2 "

الحل

ليكن Ω كون الإمكانيات $card\Omega=A_8^2$

* لكي تكون الكرتين سوداويتين مجموعهما 2 يجيب أن تسحب من 4 كرات سوداء تحمل الرقم 1

$cardI=A_4^2$ $p\left(I\right)=\dfrac{A_4^2}{A_8^2}$

* نعتبر A " الحصول على كرتين سوداويتين " B " الحصول على كرتين مجموعهما 2 "

$cardA=A_5^2$ $cardB=A_6^2$ $p\left(J\right)=p_B\left(A\right)=\dfrac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(B\right)}=\dfrac{p\left(I\right)}{p\left(B\right)}=\dfrac{\dfrac{A_4^2}{A_8^2}}{\dfrac{A_6^2}{A_8^2}}=\dfrac{A_4^2}{A_6^2}$

طريقة ثانية بما أن الأحداث الابتدائية لها نفس الاحتمالات فان $p\left(J\right)=\dfrac{card\left(A\cap B\right)}{cardB}=\dfrac{A_4^2}{A_6^2}$

2- الاحتمالات الكلية

a- تجزيئ مجموعة

تعريف

نقول إن الأحداث $A_1;A_2;..........A_n$ تجزيئا للفضاء Ω اذا تحقق الشرطان التاليان :

$\forall(i;j)\quad i\neq j\quad 1\leq i\leq n\quad 1\leq j\leq n\quad A_i\cap A_j=\varnothing$

$A_1\cup A_2.........\cup A_n=\Omega$

b- خاصية الاحتمالات الكلية

خاصية

ليكن $A_1;A_2;..........A_n$ تجزيئا للفضاء Ω . نعتبر B حدثا من Ω

$p\left(B\right)=p\left(A_1\right)p_{A_1}\left(B\right)+p\left(A_2\right)p_{A_2}\left(B\right)+..........+p\left(A_n\right)p_{A_n}\left(B\right)$

البرهان

$B=B\cap\Omega=B\cap\left(A_1\cup A_2.........\cup A_n\right)=\left(B\cap A_1\right)\cup\left(B\cap A_2\right)............\cup\left(B\cap A_n\right)$

بما أن $A_1;A_2;..........A_n$ غير منسجمة مثنى مثنى فان $\left(A_1\cap B\right);\left(A_2\cap B\right);..........\left(A_n\cap B\right)$ غير منسجمة مثنى مثنى. ومنه

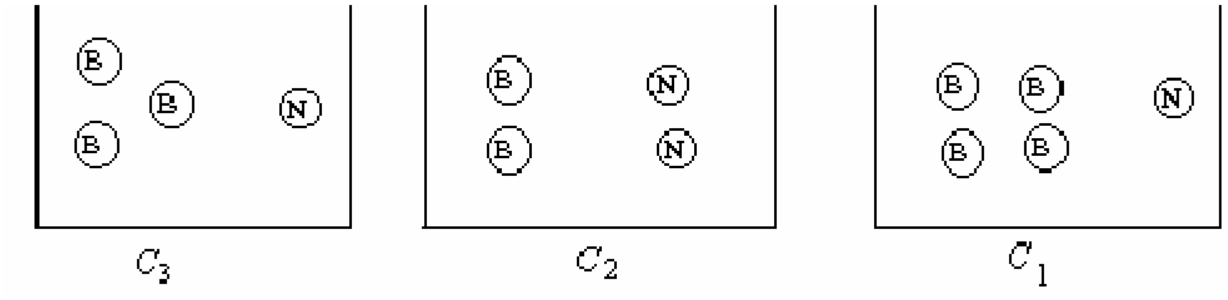
$p\left(B\right)=p\left(B\cap A_1\right)+p\left(B\cap A_2\right)..........................+p\left(B\cap A_n\right)$

$p\left(B\right)=p\left(A_1\right)p_{A_1}\left(B\right)+p\left(A_2\right)p_{A_2}\left(B\right)+..........+p\left(A_n\right)p_{A_n}\left(B\right)$

تمرين نعتبر ثلاث صناديق . يحتوي الصندوق الأول على 4 كرات بيضاء وكرة سوداء و الصندوق الثاني على كرتين بيضاويتين و كرتين سوداويتين و الصندوق الثالث على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاث ثم نسحب منه كرة واحدة .

لنحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .



نعتبر الأحداث C_i " اختيار الصندوق i " $1 \le i \le 3$ B "سحب كرة بيضاء "

لدينا C_1 و C_2 و C_3 غير منسجمة مثنى مثنى . و اتحادهم هو Ω ومنه C_1 و C_2 و C_3 تكون تجزيئا لـ Ω

بما أن للصناديق نفس الاحتمال فان $p(C_1) = p(C_2) = p(C_3) = \frac{1}{3}$

احتمال الحصول على كرة بيضاء من صندوق C_1 هي $p_{C_1}(B) = \frac{4}{5}$

احتمال الحصول على كرة بيضاء من صندوق C_2 هي $p_{C_2}(B) = \frac{2}{4}$

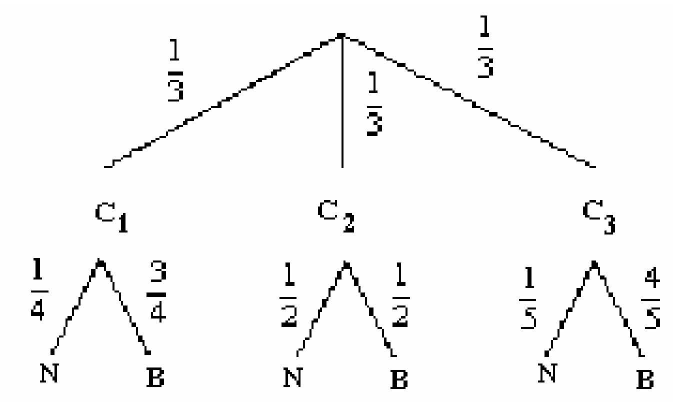
احتمال الحصول على كرة بيضاء من صندوق C_3 هي $p_{C_3}(B) = \frac{3}{4}$

بما أن C_1 و C_2 و C_3 تجزيئا كليا لـ Ω فان حسب خاصية الاحتمالات الكلية

$$p(B) = p(C_1)p_{C_1}(B) + p(C_2)p_{C_2}(C_2) + p(C_3)p_{C_3}(B)$$

$$p(B) = \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{41}{64}$$

ملاحظة يمكن تلخيص جميع نتائج تجربة في هده الشجرة



مثلا $p_{C_1}(B) = \frac{4}{5}$ $p_{C_3}(B) = \frac{1}{4}$

من خلا ل الشجرة نستنتج $p(N) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{19}{60}$

تمرين ينتج معمل مصابيح كهربائية بواسطة ثلاث آلات A و B و C بحيث

- الآلة A تضمن 20°/ₒ من الإنتاج و °/ₒ 5 من المصابيح المصنوعة غير صالحة
- الآلة B تضمن 30°/ₒ الإنتاج و °/ₒ 4 من المصابيح المصنوعة غير صالحة
- الآلة C تضمن 50°/ₒ من الإنتاج و °/ₒ 1 من المصابيح المصنوعة غير صالحة

نختار عشوائيا مصباحا كهربائيا .

1- مـــــا هـــــو احتمـــــال

a- لكي يكون المصباح غير صالح و مصنوع بـ A

b- لكي يكون المصباح غير صالح و مصنوع بـ B

c- لكي يكون المصباح غير صالح و مصنوع بـ C

2- استنتج الاحتمال لكي يكون المصباح غير صالح

(لاحظ أن $\frac{20}{100}=20\%$ هو الاحتمال لكي يكون المصباح مصنوعا بـ A و 5% هو الاحتمال لكي يكون المصباح غير صالح علما أنه مصنوعا بـ A)

3- أحسب احتمال لكي يكون المصباح مصنوعا بـ A علما أنه غير صالح .

الحل

1- a- A " مصنوع بـ A " I " غير صالح "

$$p(A\cap I)=p(A)p_A(I)=\frac{20}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{10}$$

b- B " مصنوع بـ B "

$$p(B\cap I)=p(B)p_I(B)=\frac{30}{100}\times\frac{4}{100}=\frac{12}{1000}$$

c- C " مصنوع بـ C "

$$p(C\cap I)=p(C)p_I(C)=\frac{50}{100}\times\frac{1}{100}=\frac{5}{1000}$$

d- $p(I)=p(A)p_A(I)+p(B)p_B(I)+p(C)p_C(I)=...$

2- $$p_I(A)=\frac{p(A\cap I)}{p(I)}$$

IV- الاستقلالية

1- الأحداث المستقلة

نشاط يحتوي كيس على 4كرات حمراء و كرتين خضراويتين . نسحب بالتتابع كرتين من الكيس

نعتبر الحدثين R_1 " الكرة الأولى حمراء " R_2 " الكرة الثانية حمراء "

أحسب $p(R_2)$ $p_{R_1}(R_2)$ ثم قارنهما في الحالتين التاليتين

1- السحب بإحلال

2- السحب بدون إحلال

1- $p(R_2) = p_{R_1}(R_2)$ أي $p(R_1\cap R_2)=p(R_1)\times p(R_2)$ نقول إن R_1 و R_2 مستقلان .

2- $p(R_2) \neq p_{R_1}(R_2)$ نقول إن R_1 و R_2 غير مستقلين.

تعريف

نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا و فقط إذا كان $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

تمرين نرمي نردا مرتين متتاليتين . نعتبر الأحداث A " الحصول على العدد في الرمية الأولى"
B " الحصول على عددين مجموعهما 7 " C " الحصول على عددين زوجيين "
هل A و B مستقلان ؟ هل A و C مستقلان ؟

2- استقلالية الاختبارات العشوائية

نعلم أن بعض التجارب العشوائية تتكون من اختبار واحد أو عدة اختبارات عشوائية فمثلا

أ- "رمي قطعة النقود n مرة متتالية " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "رمي قطعة النقود"

ب- "رمي النرد n مرة متتالية " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "رمي النرد "

ت- " سحب nكرة من بين m كرة بالتتابع وبإحلال " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "سحب كرة"

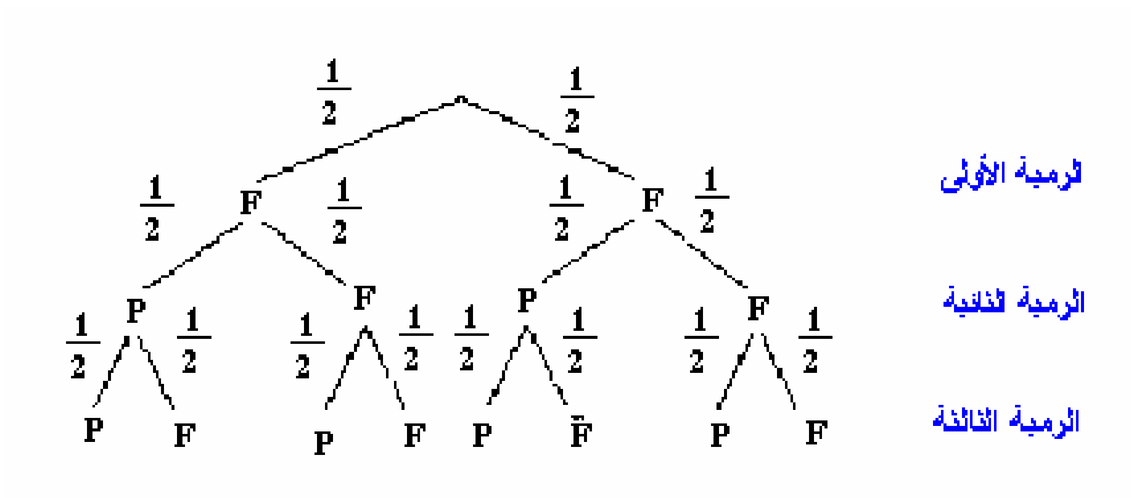
ث- " سحب nكرة من بين m كرة بالتتابع وبدون إحلال " تجربة عشوائية تتكون من n اختبار "سحب كرة"

نلاحظ أنه في بعض التجارب لا تؤثر نتائج اختبار على اختبار الموالي مثلا كتجارب الأمثلة أ- ب – ت
و أنه في بعض التجارب تؤثر نتائج اختبار على اختبار الموالي مثلا – ث.

إذا كانت نتائج اختبار ما لا تؤثر على الاختبار الموالي نقول إن التجربة تتكون من اختبارات عشوائية مستقلة

حـــــــالة خـــــاصة (الاختبارات المتكررة)

مثال1 نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية . أحسب احتمال الحدث A " ظهور الوجهF مرتين بالضبط "



$$A=\{FFP;FPF;PFF\}$$

$$p(A)=p(FFP)+p(FPF)+p(PFF)$$

$$p(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{2}\right)^3=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

مثال 2

نرمي نردا خمس مرات متتا لية . لنحسب احتمال الحصول على رقم قابل للقسمة على 3 ثلاث مرات بالضبط .

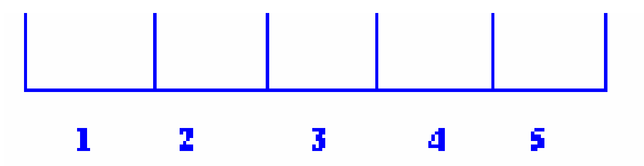
تتكون هده التجربة من تكرار الاختيار " رمي النرد" خمس مرات .

في هدا الاختبار نعتبر الحدث A " الحصول على رقم قابل للقسمة على 3"

$$p(A)=\frac{1}{3}\qquad A=\{3;6\}$$

عندما نرمي النرد اما نحصل على الحدث A و اما على الحدث $\bar{A}$

و هكذا يمكن أن نمثل هده التجربة كما يلي :



حيث تشغل الخانات الخمس بـ A أو $\bar{A}$.

نعتبر B " الحصول على رقم قابل للقسمة على3 ثلاث مرات "

النتائج التي تنتمي الى B هي النتائج الدي يحتل فيها الحدث A ثلاث مرات من بين 5 أمكنة .

و منه عدد النتائج التي تنتمي الى B هي C_5^3 .

و بما أن احتمال كل نتيجة تنتمي الى B هو $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ لأن $p(\bar{A})=\frac{2}{3}$

فان $$p(B)=C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{5-2}$$

خاصية

ليكن A حدثا احتماله p في اختبار عشوائي .

ادا أعيد هدا الاختبار n مرة فان احتمال وقوع الحدث A k مرة بالضبط $k\le n$ هو

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

تمرين الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو $\frac{2}{3}$, قام الرامي بعشر محاولات .

ما هو الاحتمال لكي يصيب الهدف 6 مرات بالضبط ؟

تمرين يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 12 كرة سوداء و 3 كرات حمراء

نسحب 8 كرات بالتتابع و باحلال .

أحسب احتمال الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط .